MATEMATIKA 12

II dalis



LEIDĖJŲ ŽODIS

Mieli dvyliktokai,
šis vadovėlis skirtas pasirinkusiems išplėstinį matematikos kursą. Vadovėlio pirmą dalį sudaro 1, 2 bei 3 skyriai, antrą — 4 ir 5 skyriai bei XI–XII klasės kurso kartojimo medžiaga. Kaip ir XI klasės vadovėlyje, kiekvienas skyrius sudarytas iš skyrelių, kuriuose dėstoma teorija, pateikiami išspręsti pavyzdžiai ir duodamos užduotys, kurias turėtumėte atlikti savarankiškai. Beveik kiekvieno skyrelio pabaigoje yra pratimų ir uždavinių, susijusių su prieš tai nagrinėta teorine medžiaga. Spręsdami uždavinius geriau įsiminsite teoriją, giliau suvoksite dalyką. Kaip paprastai, sunkesniųjų uždavinių numeriai nuspalvinti.
Kiekvieno skyriaus pabaigoje yra kartojimo uždavinių. Spręsdami šiuos uždavinius prisiminsite skyriaus medžiagą. Tarp jų rasite ir geometrijos uždavinių, kuriuos spręsti mokėtės pagrindinėje mokykloje bei XI klasėje. Kartojimo uždavinių skyrelyje su atskiru pavadinimu „Įvairūs uždaviniai" pateikta uždavinių, kurie nėra tiesiogiai susiję su išnagrinėtu skyriumi. Šiame skirsnyje rasite ir lengvesnių, ir sunkesnių uždavinių. Kai kurių uždavinių sprendimo būdai nėra aptarti teorijoje, taigi juos sprendžiant gali tekti kai ką sugalvoti patiems, galbūt patarimo paklausti mokytojo. Kam uždavinių pasirodys per mažai, galės pasinaudoti atskira knygele išleistu uždavinynu.
Šį vadovėlį kūrė ne vien autorių kolektyvas, bet ir leidyklos specialistai, konsultantai, eksperimentuojantys mokytojai. Nuoširdžiai dėkojame visiems, prisidėjusiems rengiant vadovėlį.
Prašome savo pastabas, pageidavimus ir pasiūlymus siųsti adresu:
Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-2021 Vilnius.

Vadovėlį rengė autorių kolektyvas:

Kornelija Intienė**, **Antanas Skūpas**, **Vilius Stakėnas**, **Eugenijus Stankus**, **Vladas Vitkus.

Su eksperimentiniu vadovėliu dirbo mokytojai: *R. Biekšienė, V. Bartkuvienė, K. Intienė, M. Jakutienė, V. Jankevičienė, R. Jonaitienė, O. Juodienė, A. Karmanova, S. Kavaliūnienė, R. Klasauskienė, I. Knyzelienė, R. Kučiauskienė, A. Kukučionienė, R. Kuliešienė, D. Matienė, G. Mikalauskienė, L. Papuškienė, P. Puzinaitė, V. Sičiūnienė, V. Stoškuvienė, A. Ūsienė, V. Viniautienė, R. Želvienė, R. Žeimienė.*

MATEMATIKA 12

II DALIS

Išplėstinis kursas

TEV

VILNIUS 2003

UDK 51(075.3)
Ma615

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos rekomenduota 2003 02 10 Nr. 76

Recenzavo Matematikos ir informatikos institutas

Darbo vadovas *Vilius Stakėnas*

Redaktoriai: *Juozas Mačys*, *Valdas Vanagas*

Programinė įranga: *Tadeuš Šeibak*, *Rolandas Jakštys*

Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė*

Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Nijolė Drazdauskienė*

Korektorė *Žydrūnė Stundžienė*

Konsultantai: *Marytė Stričkienė*, *Elmundas Žalys*

Leidyklos TEV interneto svetainė www.tev.lt

ISBN 9955–491–50–7 (2 dalis)

Turinys

IV Statistika



14. Statistikos elementai

14.1. Generalinė aibė ir imtis

Lietuvoje gyvena daugiau kaip 3 milijonai gyventojų. Kokie jie? Kaip pasiskirstę pagal tautybę, veiklos pobūdį, amžių...?

Siekiant tai sužinoti, 2000 metais buvo atliktas visuotinis gyventojų surašymas. Šio brangiai kainavusio projekto rezultatas — išsami informacija apie šalies gyventojus. Ar ilgai galėsime ja pasikliauti? Kaip patikrinti, ar ji atitinka tikrąją šalies padėtį, pavyzdžiui, praėjus keliems metams po surašymo?

Suprantama, dažnai vykdyti gyventojų surašymus neįmanoma. Yra kita išeitis: užuot apklausę visus gyventojus galime atrinkti jų dalį ir pagal šios dalies duomenis daryti išvadas apie visus gyventojus. Tada visų gyventojų aibę vadiname *visuotine* arba *generaline* aibe, o atrinktųjų aibę — *imtimi*. Kaip sudaryti imtį, kad pagal iš jos gautus duomenis galėtume teisingai spręsti apie visumą, t. y. generalinę aibę?

Imtis turi gerai atstovauti visai visumai. Statistikai šį reikalavimą formuluoja taip: imtis turi būti reprezentatyvi.

Nelengva pasakyti, kaip reikia sudaryti reprezentatyvią imtį. Aišku, kad į tokią imtį turi būti įtraukta pakankamai daug tiriamųjų objektų. Kita vertus, net ir didelė imtis gali būti nereprezentatyvi. Pavyzdžiui, jeigu pagal visų Lietuvos šešiolikamečių duomenis spręsime apie visus Lietuvos gyventojus — išvados bus visiškai klaidingos. Taip pat būtų klaidinga spręsti apie visus gyventojus iš duomenų, gautų apklausus miestiečius ir pan.

Geriausia objektus į imtį atrinkti atsitiktinai. Šitaip atliekamos, pavyzdžiui, įvairios nuomonių apklausos.

Taigi statistinis tyrimas prasideda taip:

- nustatome, kokius objektus tirsime, t. y. nustatome generalinę aibę;
- nustatome, kokį objektų požymį ar požymius tirsime, kaip jį matuosime ar žymėsime;
- nusprendžiame, kaip sudarysime reprezentatyvią imtį.

Po to jau galime veikti: atrinkti objektus, užsirašyti duomenis, juos nagrinėti ir daryti išvadas.

Objektai ir požymiai, kuriuos tiriame, gali būti labai įvairūs. Pavyzdžiui, jeigu norime gauti išvadas apie mokyklos moksleivių akių spalvą, tai generalinę aibę sudaro visi mokyklos moksleiviai. Požymį — akių spalvą — galime reikšti tiesiog žodžiais. Imtį galime sudaryti, pavyzdžiui, atsitiktinai parinkę po kelis kiekvienos klasės moksleivius. Belieka pasižiūrėti jiems į akis ir užsirašyti duomenis, pavyzdžiui:
juodos, mėlynos, mėlynos, ...

Dažnai požymį matuojame skaičiais. Tokių požymių pavyzdžiai: žmogaus ūgis; darbuotojų skaičius įmonėje; laiko tarpsnis nuo elektros lemputės įjungimo į elektros grandinę iki jos perdegimo momento ir t. t. Kai atsitiktinai vieną po kito atrenkame generalinės aibės objektus ir skaičiais reiškiame jų požymius, iš anksto negalime pasakyti, kokias reikšmes gausime. Taigi teisinga sakyti, kad matuodami objekto požymį nustatome (arba stebime) atsitiktinio dydžio reikšmę. Apie duomenis

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

gautus iš didumo n atsitiktinės imties, galime sakyti: tai reikšmės, gautos atlikus n nepriklausomų tam tikro atsitiktinio dydžio stebėjimų. Remdamiesi jomis darome įvairias išvadas. Todėl patogu ne atrinktųjų objektų, bet tiesiog gautųjų duomenų aibę vadinti imtimi.

14.2. Dažniai ir diagramos

Atrinkę generalinės aibės elementus ir juos rūpimu požiūriu ištyrę, gauname duomenų eilę, t. y. imtį

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

čia n — imties didumas (atrinktųjų elementų skaičius).

Priklausomai nuo tiriamo požymio šie duomenys gali būti užrašomi žodžiais ar simboliais, reiškiami skaičiais. Pirmuoju atveju duomenis vadiname *kokybiniais*, antruoju — *kiekybiniais*.

Pavyzdžiui, jeigu atliekame apklausą, norėdami sužinoti, už kurį kandidatą žmonės balsuos per prezidento rinkimus, tai gautieji duomenys yra kokybiniai; jeigu klausinėjame, kiek laiko per dieną jie žiūri televizorių — duomenys kiekybiniai.

1 PAVYZDYS. Tarkime, kad nusprendėme tyrinėti Lietuvos šešiolikamečių gyventojų ūgį. Atsitiktinai atrinkę 10 jaunuolių, išmatavome jų ūgį ir gavome tokią imtį:

$$182, \quad 180, \quad 181, \quad 180, \quad 175, \quad 181, \quad 185, \quad 181, \quad 182, \quad 174.$$

Pirmiausia ją sutvarkykime duomenų didėjimo tvarka:

$$174, \quad 175, \quad 180, \quad 180, \quad 181, \quad 181, \quad 181, \quad 182, \quad 182, \quad 185.$$

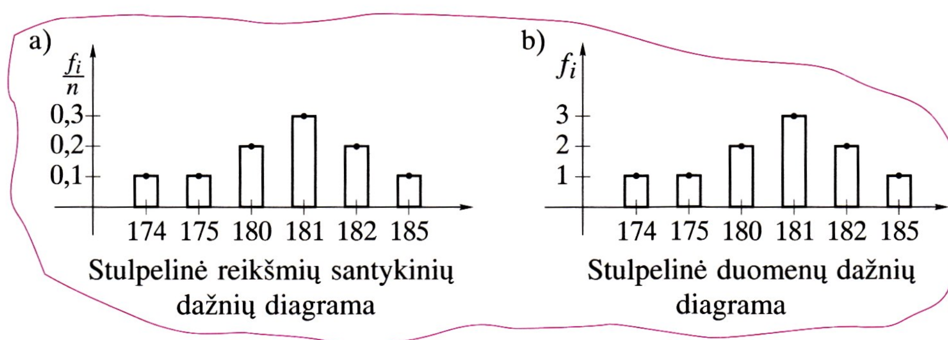
Iš sutvarkytos imties lengva nustatyti, kad imtyje yra 6 skirtingi duomenys: 174, 175, 180, 181, 182, 185, kurie pasitaiko atitinkamai $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, $f_4 = 3$, $f_5 = 2$, $f_6 = 1$ kartų. Padalijęs duomenų kartojimosi dažnius iš imties didumo $n = 10$, gauname santykinius dažnius

$$\frac{f_1}{n} = \frac{1}{10}, \quad \frac{f_2}{n} = \frac{1}{10}, \quad \frac{f_3}{n} = \frac{2}{10}, \quad \frac{f_4}{n} = \frac{3}{10}, \quad \frac{f_5}{n} = \frac{2}{10}, \quad \frac{f_6}{n} = \frac{1}{10}.$$

Visus šiuos dydžius patogu vaizduoti lentele:

$x_i =$	174	175	180	181	182	185
$f_i =$	1	1	2	3	2	1
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

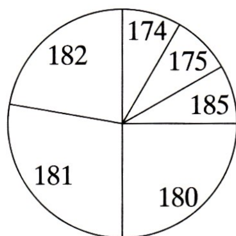
Dar geriau už lentelę imties savybes parodo brėžinys. Atidėję koordinačių sistemos abscisių ašyje imtyje pasitaikančias reikšmes ir nubrėžę stulpelius, kurių aukščiai proporcingi santykiniams dažniams $\frac{f_i}{n}$, gauname reikšmių santykinių dažnių stulpelinę diagramą (žr. a) pav.):



Stulpelinė reikšmių santykinių dažnių diagrama

Stulpelinė duomenų dažnių diagrama

Kartais vertikalioje koordinačių sistemos ašyje atidedamos ne santykinių dažnių $\frac{f_i}{n}$ reikšmės, bet dažnių f_i reikšmės. Tada braižome stulpelinę duomenų dažnių diagramą (žr. b) pav.). Abi šios diagramos skiriasi tik reikšmėmis, atidėtomis ordinačių ašyje. Grafiškai imties santykinius dažnius (taip pat ir dažnius) galima pavaizduoti ir skrituline diagrama. Skritulys dalijamas į tiek sektorių, kiek yra skirtingų imties duomenų. Sektorių, atitinkančių imties duomenis, centriniai kampai turi būti proporcingi šių duomenų dažniams. Tada ir sektorių plotai bus proporcingi šiems dažniams.
Mūsų imties skritulinė diagrama atrodytų taip:



Taip, kaip parodyta 1 pavyzdyje, gali būti tvarkomos visos iš skaičių sudarytos imtys

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Pirmiausia patogu jas sutvarkyti didėjimo tvarka; nustačius, kokios reikšmės į ją įeina, sudaryti dažnių lentelę:

$x_i =$	x_1	x_2	x_3	$\dots$
$f_i =$				
$\frac{f_i}{n} =$				

Jeigu reikia — dažnių lentelę galime pavaizduoti stulpelinėmis ar skritulinėmis diagramomis.

1 užduotis. Iš sąsiuvinių su ištaisytais matematikos kontroliniais darbais krūvos paėmę 12 sąsiuvinių, radome juose tokius įvertinimus:

10, 8, 5, 8, 7, 6, 6, 10, 9, 7, 8, 6.

Sutvarkykite imtį reikšmių didėjimo tvarka, sudarykite dažnių lentelę, nubraižykite stulpelinę diagramą.

Kartais stulpelinė duomenų dažnių diagrama nėra pats geriausias būdas vaizduoti imties duomenis.

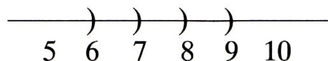
2 PAVYZDYS. Dešimties moksleivių matematikos pažymių metiniai vidurkiai yra tokie:

5,6, 6,1, 6,5, 7,7, 7,8, 8,15, 8,3, 8,7, 9,1, 9,7.

Visi imties duomenys yra skirtingi. Taigi visų jų santykiniai dažniai yra lygūs $\frac{1}{10}$. Jei brėžtume stulpelinę diagramą — reikėtų nubrėžti dešimt vienodo aukščio stulpelių ir tiek.

Kai imtyje yra daug skirtingų duomenų, juos geriausia grupuoti.

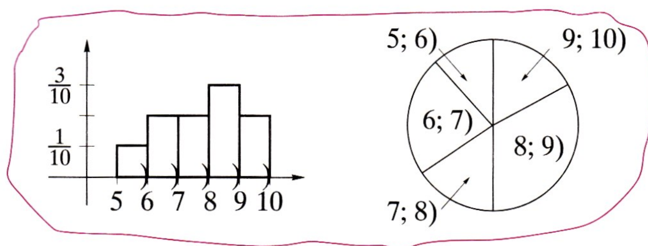
Matome, kad visi mūsų imties duomenys yra intervale [5,6; 9,7]. Padalykime intervalą į kelis vienodo ilgio intervalus ir nustatykime, kiek duomenų patenka į juos. Į kelias dalis dalyti duomenų intervalą? Galime pasirinkti. Imkime vietoje [5,6; 9,7] intervalą [5; 10] ir padalykime jį į penkis vienetinius intervalus:



Suradę, kiek kartų imties duomenys patenka į dalijimo intervalus, sudarykime lentelę:

Intervalas	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)
Dažnis $f_i =$	1	2	2	3	2
Santykinis dažnis $\frac{f_i}{n} =$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

Dabar jau galime nubraižyti *sugrupuotos imties santykinių dažnių stulpelinę diagramą* ir skritulinę diagramą.



Sugrupuotos imties santykinių dažnių stulpelinės diagramos vadinamos histogramomis. Paprastai histogramos braižomos taip, kad atitinkamų intervalų stulpelių plotai būtų lygūs tų intervalų santykiniams dažniams. Mūsų atveju taip ir yra, nes imties intervalą dalijome į vienetinius intervalus, o histogramos stulpelių aukščiai lygūs atitinkamiems santykiniams dažniams. Jeigu dalijimo intervalų ilgiai būtų lygūs, pavyzdžiui 2, tai norėdami, kad histograma turėtų minėtą savybę, turėtume braižyti $\frac{f_i}{2n}$ aukščio stulpelius.

2 užduotis. Apklausus 50 moksleivių, kiek valandų per savaitę jie praleidžia prie kompiuterio, buvo gauti tokie atsakymai:

5	8	20	7	15	11	15	13	9	10
14	7	8	11	4	7	12	5	9	11
9	11	8	7	12	8	12	15	8	8
14	10	19	12	15	5	4	11	12	11
10	8	11	12	9	16	10	12	9	8

Užbaikite pildyti duomenų dažnių lentelę:

$x_i =$	4	5	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	19	20
$f_i =$	2	2	5	8	5	4	7	7	1	2				

Duomenų intervalą [3; 21] padalykite į 6 lygias dalis. Sugrupuokite imtį ir užpildykite lentelę. Nubraižykite histogramą.

Intervalas	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)	[15; 18)	[18; 21]
$f_i =$ $\frac{f_i}{n} =$						

Kokie turėtų būti histogramos stulpelių aukščiai, kad stulpelių plotai būtų lygūs atitinkamiems santykiniams dažniams?

Jau minėjome, kad į imties duomenis galime žvelgti kaip į reikšmes, gautas iš nepriklausomų to paties atsitiktinio dydžio stebėjimų. Šio atsitiktinio dydžio skirstinio paprastai nežinome, tačiau pagal imties duomenis galime sudaryti santykinių dažnių lentelę.

Kai imtis yra didelė, t. y. atlikta daug atsitiktinio dydžio stebėjimų, tai santykiniai dažniai mažai skiriasi nuo atitinkamų atsitiktinio dydžio reikšmių tikimybių.

Skaičiuoti santykinius dažnius bei braižyti stulpelines ar skritulines diagramas galime ir iš kokybinių duomenų sudarytomis imtimis.

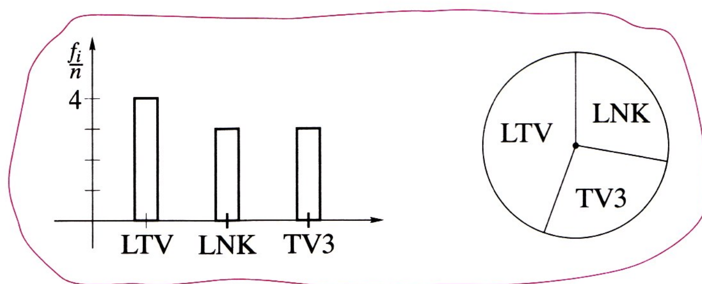
3 PAVYZDYS. Apklausus 10 žmonių, kurias iš trijų didžiausių Lietuvos televizijų programas (LTV, LNK, TV3) jie dažniausiai žiūri, buvo gauti tokie duomenys:

LTV, LTV, LNK, TV3, LNK,
LTV, TV3, LTV, LNK, TV3.

Suskaičiavę, kiek kartų žmonės paminėjo LTV, LNK ir TV3, sudarykime dažnių lentelę:

	LTV	LNK	TV3
$f_i =$	4	3	3
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

Imtį galime pavaizduoti stulpeline bei skrituline diagramomis:



Skritulinės diagramos sektorių plotai yra proporcingi atitinkamų duomenų dažniams.

Pratimai ir uždaviniai

1. Mokyklos direkcija nori palyginti savo mokyklos dvyliktų klasių mokymosi rezultatus pagal diagnostinio matematikos kontrolinio darbo įvertinimus. Padėkite direkcijai tai padaryti, kai kontrolinio darbo rezultatai tokie:

a) 12^a: 6, 9, 5, 3, 6, 10, 8, 7, 7, 4, 6, 9, 7, 6, 10, 8, 10, 5, 7, 4, 4, 9, 8, 8, 6, 4, 3, 7, 7, 9;

12^b: 10, 9, 8, 9, 7, 3, 4, 6, 5, 5, 8, 6, 6, 4, 3, 5, 7, 8, 10, 6, 8, 7, 7, 9, 8;

b) 12^a: 3, 2, 5, 10, 6, 3, 4, 4, 8, 10, 9, 7, 6, 6, 7, 7, 6, 6, 8, 10, 9, 8, 6, 7, 3;

12^b: 5, 8, 4, 6, 10, 7, 6, 9, 8, 8, 4, 6, 6, 7, 9, 10, 8, 7, 8, 8;

c) 12^a: 6, 10, 3, 5, 9, 9, 2, 8, 9, 6, 8, 10, 5, 7, 4, 8, 7, 10, 10, 9, 8, 5, 6, 9, 6, 7, 8, 9, 6, 9.

12^b: 9, 9, 2, 8, 3, 8, 4, 6, 2, 10, 5, 7, 10, 8, 7, 10, 8, 8, 6, 7, 8, 7, 7, 10, 8.

1. Sutvarkykite imtį (įvertinimus) didėjimo tvarka ir sudarykite įvertinimų dažnių bei santykinių dažnių lentelę.
2. Nubrėžkite imties stulpelines ir skritulines diagramas.
3. Padalykite reikšmių inervalą [2; 10] į 4 lygias dalis, nustatykite, kiek reikšmių patenka į kiekvieną intervalą, ir sudarykite sugrupuotų imčių dažnių lenteles.
4. Nubrėžkite sugrupuotų imčių histogramas.

2. Norint nustatyti, kiek laiko per savaitę moksleiviai užtrunka ruošdami pamokas, 50 devintokų, 50 dešimtokų, 50 vienuoliktokų ir 50 dvyliktokų buvo paprašyti vieną savaitę kiekvieną dieną užsirašyti, kiek valandų užtruko ruošdami pamokas, o praėjus savaitei šias valandas susumuoti. Moksleiviai atnešė tokius skaičius:

IX:	13,7	6,6	9,8	10,7	17,0	X:	10,5	6,8	11,2	13,0	11,1
	6,7	9,7	12,3	6,8	4,0		9,3	5,6	14,6	12,0	9,1
	9,9	11,6	2,4	6,9	8,8		14,6	19,3	11,6	9,0	9,0
	4,7	6,8	13,5	9,2	13,5		19,1	7,0	4,8	12,2	9,0
	9,0	17,5	8,4	15,0	10,5		14,8	7,2	18,5	11,3	17,0
	2,2	9,8	2,8	1,8	8,8		11,7	9,7	5,6	13,1	14,1
	7,2	6,5	5,8	3,4	11,5		14,4	10,0	15,6	8,8	13,1
	5,0	7,2	6,9	2,0	16,0		5,5	9,8	6,2	4,9	8,9
	8,9	12,3	7,9	5,2	4,5		8,6	11,2	17,4	13,3	10,1
	15,1	10,0	2,9	9,2	10,5		13,8	10,4	9,6	5,6	10,2

XI:	6,2	5,5	9,8	10,0	13,3	XII:	7,7	12,3	26,8	21,2	14,0
	17,4	8,6	8,4	10,2	5,6		16,0	13,7	17,6	11,8	17,4
	8,6	13,7	10,3	11,7	11,2		12,3	28,7	22,1	13,3	13,5
	13,1	6,7	11,2	10,4	9,1		18,9	11,5	9,9	17,2	12,0
	12,0	5,6	14,6	9,3	9,1		13,6	21,7	7,5	8,5	18,3
	9,0	19,2	11,6	14,6	9,0		16,3	17,2	16,4	12,1	13,6
	12,0	6,9	4,7	19,1	17,3		25,2	21,8	17,9	17,6	18,4
	10,2	7,2	18,2	14,8	14,1		12,0	19,4	16,5	9,9	21,4
	11,3	9,7	5,6	11,6	13,1		7,2	14,7	12,5	14,9	12,9
	13,1	9,8	15,6	14,4	8,9		16,8	15,2	13,8	16,2	12,8

1. Padalykite kiekvienos imties duomenų intervalą į 6 lygias dalis, nustatykite, kiek duomenų patenka į kiekvieną intervalą, ir sudarykite sugrupuotų imčių dažnių lenteles.
2. Nubrėžkite sugrupuotų imčių histogramas.
3. Palyginkite gautąsias histogramas. Kokias išvadas galėtumėte padaryti apie skirtingų klasių moksleivių pamokų rengimui skiriamą laiką?

3. Mantas gavo užduotį parengti statistikos projektą apie orus vasaros mėnesiais. Visą vasarą (birželį, liepą ir rugpjūtį) jis stebėjo dienos orą ir užsirašydavo, kokia diena buvo — saulėta (s), apniukusi (a) ar lietinga (l). Jo stebėjimo rezultatai tokie:

birželis: s, s, s, a, a, l, l, l, a, s, a, s, s, l, l, l, a, s, s, s, l, s, s, a, a, l, l, a, a, a;

liepa: s, s, s, s, s, a, a, l, l, l, a, l, a, l, a, a, s, s, s, s, s, s, a, a, a, s, s, s, s, a, a;

rugpjūtis: a, l, l, l, l, l, a, a, s, s, a, a, l, l, l, a, a, a, a, l, l, a, l, l, s, a, a, s, s, s, a.

Mantas suskaičiavo, kiek saulėtų, apniukusių ir lietingų dienų buvo kiekvieną mėnesį, ir sudarė dažnių ir santykinių dažnių lenteles.

1. Kokias lenteles sudarė Mantas?
2. Pavaizduokite šias tris kokybinių duomenų imtis stulpelinėmis ir skritulinėmis diagramomis.
3. Kuris mėnuo buvo:
   a) labiausiai saulėtas; b) labiausiai apniukęs; c) labiausiai lietingas?

14.3. Imties moda, mediana ir kvartiliai

Pažvelgę į dvylikos matematikos kontrolinio darbo pažymių, surašytų didėjimo tvarka, eilutę

4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 10

iškart matome, kad 8 — dažniausiai pasitaikęs pažymys. Skaičius 8 vadinamas šios imties moda (dažniausiai pasitaikiusiu imties duomeniu).
Pusė imties duomenų yra ne didesni už 7, kita pusė — ne mažesni už 8. Taigi skaičius $\frac{8+7}{2} = 7{,}5$ tarsi padalija imtį pusiau. Jis vadinamas imties mediana. Panagrinėkime šias ir kitas sąvokas nuodugniau.

1 PAVYZDYS. Žaisdamas 12 krepšinio turnyro rungtynių, krepšininkas pelnė taškų:

6, 8, 4, 10, 15, 16, 7, 15, 5, 10, 4, 10.

Taigi turime dvylikos skaičių imtį. Iš pradžių ją sutvarkykime:

4, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 10, 10, 15, 15, 16.

Sudarykime šios imties duomenų dažnių ir santykinių dažnių lentelę. Papildykime ją dar dviem eilutėmis.

$x_i =$	4	5	6	7	8	10	15	16
$f_i =$	2	1	1	1	1	3	2	1
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$
$f_1 + \cdots + f_i =$	2	3	4	5	6	9	11	12
$\frac{f_1+\cdots+f_i}{n} =$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{12}$	1

Sumos $f_1 + \cdots + f_i$ $(\frac{f_1+\cdots+f_i}{n})$ vadinamos sukauptaisiais dažniais (sukauptaisiais santykiniais dažniais).
Sumos $f_1 + \cdots + f_i$ reikšmė lygi ne didesnių už x_i imties duomenų skaičiui.
Iš lentelės matome, kad dažniausiai pasitaikantis duomuo yra 10, jis vadinamas imties moda ir žymimas taip: $\mathrm{M_o} = 10$.
Panagrinėkime sukauptųjų dažnių lenteles. Po reikšme $x = 5$ parašytas sukauptasis dažnis lygus $3 = \frac{1}{4} \cdot 12$, o santykinis sukauptasis dažnis — $\frac{1}{4}$. Taigi — ketvirtis imties duomenų yra ne didesni už 5, o likusieji — didesni. Apskaičiuokime šios reikšmės ir po jos einančios reikšmės aritmetinį vidurkį:

$$\frac{5+6}{2} = 5{,}5.$$

Teisinga sakyti: ketvirtis visų imties duomenų yra mažesni už 5,5; taigi šis skaičius tarsi „atkerta“ ketvirtadalį imties duomenų. Jis vadinamas pirmuoju imties kvartiliu ir žymimas taip:

$$Q_1 = 5{,}5.$$

Panašiai suraskime skaičių, kuris „atkerta“ pusę imties duomenų. Iš lentelės matome, kad po skaičiumi 8 parašyti sukauptieji dažniai lygūs $6 = \frac{1}{2} \cdot 12$ ir $\frac{1}{2}$. Skaičių 8 ir 10 aritmetinis vidurkis

$$\frac{8+10}{2} = 9$$

vadinamas mediana (arba antruoju kvartiliu) ir žymimas

$$M_d = 9.$$

Suraskime skaičių, kuris „atkerta“ tris ketvirtadalius (t. y. $\frac{3}{4} \cdot 12 = 9$) imties duomenų. Iš lentelės matome, kad po skaičiumi 10 parašyti sukauptieji dažniai lygūs 9 ir $\frac{3}{4}$. Taigi ieškomoji reikšmė yra

$$\frac{10+15}{2} = 12{,}5.$$

Ši reikšmė vadinama trečiuoju imties kvartiliu ir žymima taip:

$$Q_3 = 12{,}5.$$

1 užduotis. Suraskite skyrelio pradžioje užrašytos matematikos kontrolinio darbo pažymių imties

4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 10

modą, medianą ir kvartilius.

1 pavyzdyje ir 1 užduotyje nagrinėtų imčių dažnių lentelėje sukauptųjų dažnių eilutėje yra skaičiai $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ ir $\frac{3}{4}$. Kai vieno ar kelių iš šių skaičių sukauptųjų dažnių eilutėje nėra, kvartilius apibrėžiame kiek kitaip.

2 PAVYZDYS. Dešimt dienų iš eilės buvo registruojamas interneto svetainės „Matematika XI–XII“ lankytojų skaičius. Gauti šie duomenys:

12, 11, 10, 8, 11, 8, 8, 7, 9, 14.

Raskime šios imties modą, kvartilius ir medianą. Sudarykime dažnių lentelę; mums užteks santykinių dažnių.

$x_i =$	7	8	9	10	11	12	14
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{f_1+\dots+f_i}{n} =$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{10}$

Iš lentelės iškart randame modą: $M_o = 8$. Norėdami rasti pirmąjį kvartilį, sukauptųjų dažnių eilutėje ieškome reikšmės $\frac{1}{4}$. Tačiau jos nėra! Matome:

$$\frac{1}{10} < \frac{1}{4}; \quad \frac{4}{10} > \frac{1}{4}.$$

Taigi pirmasis duomuo, kurio sukauptasis dažnis didesnis už $\frac{1}{4}$, lygus 8. Jį ir laikome pirmuoju kvartiliu:

$$Q_1 = 8.$$

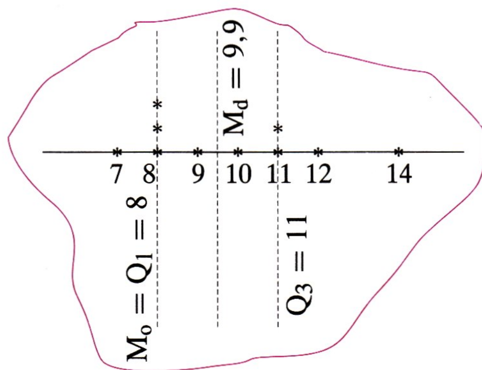
Imties medianą randame taip pat, kaip pirmajame pavyzdyje. Kadangi sukauptasis santykinis dažnis $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ parašytas po skaičiumi 9, tai

$$M_d = \frac{9+10}{2} = 9{,}5.$$

Norėdami rasti trečiąjį kvartilį, ieškome sukauptojo dažnio lygaus $\frac{3}{4}$. Tokio nėra, tačiau

$$\frac{5}{10} < \frac{3}{4}; \quad \frac{6}{10} < \frac{3}{4}; \quad \frac{8}{10} > \frac{3}{4}.$$

Taigi pirmasis imties duomuo, kurio sukauptasis dažnis yra didesnis už $\frac{3}{4}$, lygus 11. Šį skaičių ir laikome trečiuoju kvartiliu: $Q_3 = 11$.



2 užduotis. Raskite imties 1; 3; −1; 3; 1; 2; 2; 1; 3; 4; 2; 5; 2 modą, kvartilius ir medianą.

Moda vadinama dažniausiai pasitaikantis imties duomuo. Jeigu visi duomenys pasitaiko imtyje vienodai dažnai — imtis modos neturi. Jei yra keli dažniausiai pasitaikantys imties duomenys — visi jie vadinami modomis.

Nagrinėdami pavyzdžius išmokome rasti imties kvartilius. Imties kvartiliai yra skaičiai, padalijantys imtį ketvirčiais.

Pavyzdžiui, pirmasis imties kvartilis yra toks skaičius, kad ne mažiau kaip ketvirtis imties duomenų yra ne didesni už jį, ir ne mažiau kaip trys ketvirčiai — ne mažesni už jį.

Imties mediana yra toks skaičius, kad ne mažiau kaip pusė imties duomenų yra ne didesni už šį skaičių, ir ne mažiau kaip pusė — ne mažesni.

3 užduotis. Pasakykite savais žodžiais, kokią savybę turi trečiasis imties kvartilis.

Galima nustatyti ne tik imties, bet ir atsitiktinio dydžio modą, medianą ir kvartilius. Atsitiktinio dydžio atveju naudojamės ne santykinių dažnių, bet tikimybių lentele.

3 PAVYZDYS. Duotas atsitiktinio dydžio X skirstinys:

$x_i =$	-1	2	3	4	5	7
$p_i =$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$

Suraskime atsitiktinio dydžio modą, kvartilius ir medianą. Atsitiktinio dydžio moda — didžiausią tikimybę turinti reikšmė. Matome, kad yra dvi tokios reikšmės $x = 3$ ir $x = 7$. Taigi atsitiktinis dydis turi dvi modas: 3 ir 7.

Norėdami rasti kvartilius ir medianą, papildykime skirstinio lentelę „sukauptųjų tikimybių“ $p_1 + \cdots + p_i$ eilute:

$x_i =$	-1	2	3	4	5	7
$p_i =$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$p_1 + \cdots + p_i =$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{12}{12} = 1$

Matome, kad sukauptųjų tikimybių reikšmė $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ parašyta po atsitiktinio dydžio reikšme $x = 2$. Taigi pirmasis kvartilis

$$Q_1 = \frac{2+3}{2} = 2{,}5.$$

Analogiškai randame ir atsitiktinio dydžio medianą bei trečiąjį kvartilį:

$$M_d = \frac{3+4}{2} = 3{,}5; \quad Q_3 = \frac{5+7}{2} = 6.$$

Pratimai ir uždaviniai

4. Toje pačioje vietovėje pavasarį, vasarą, rudenį ir žiemą aštuonias dienas iš eilės buvo matuota oro temperatūra:

a) +3, +5, +3, +6, +5, +6, +7, +6 — pavasarį;

b) +15, +14, +10, +18, +19, +18, +16, +15 — vasarą;

c) −5, −4, −4, −3, 0, +1, +2, +3 — rudenį;

d) −10, −8, −10, −9, −6, −5, −8, −8 — žiemą.

Raskite kiekvieno metų laiko imties vyraujančią temperatūrą — modą. Apskaičiuokite kiekvienos imties medianą ir kvartilius.

5. Iš šešių mokyklos klasių atsitiktinai atrinkta po 12 mokinių. Jie gavo tokius fizikos kontrolinio darbo įvertinimus:

a) 10, 7, 8, 9, 8, 10, 9, 4, 8, 8, 10, 6;

b) 9, 9, 7, 10, 9, 9, 10, 7, 9, 8, 8, 8;

c) 10, 7, 9, 9, 10, 9, 9, 8, 6, 10, 8, 5;

d) 5, 8, 9, 9, 10, 9, 8, 9, 8, 4, 9, 6;

e) 8, 9, 8, 9, 6, 4, 8, 10, 9, 5, 7, 7;

f) 5, 7, 3, 8, 9, 8, 8, 10, 7, 10, 10, 3.

Koks kiekvienos klasės atstovų pažymys dažniausias? Raskite kiekvienos imties medianą ir kvartilius.

6. Imties duomenys yra autosalone parduotų per dieną automobilių skaičiai. Šešių savaičių pardavimų duomenys tokie:

a) 5, 3, 4, 3, 5, 2, 3;
b) 1, 0, 2, 1, 1, 2, 2;
c) 1, 3, 2, 7, 5, 6, 4;
d) 2, 5, 10, 9, 10, 8, 9;
e) 0, 0, 5, 2, 1, 2, 1;
f) 3, 3, 3, 1, 1, 1, 2.

Raskite kiekvienos imties modą, medianą ir kvartilius.

7. Parduotuvė „Batas“ nusprendė pasidomėti, kokio dydžio avalynę ãvi jaunuoliai. Pardavėjas kiekvieną dieną užsirašydavo dešimties nupirktų batų porų dydžius. Buvo gauti tokie duomenys:

a) 41, 42, 44, 40, 44, 45, 43, 42, 43, 45;

b) 44, 43, 45, 46, 45, 44, 44, 43, 42, 42;

c) 42, 43, 44, 43, 42, 41, 42, 43, 44, 42;

d) 40, 41, 42, 41, 42, 41, 43, 45, 44, 45;

e) 45, 43, 40, 45, 44, 44, 43, 43, 44, 43;

f) 43, 43, 42, 45, 45, 43, 42, 41, 40, 44.

Raskite kiekvienos imties modą, medianą ir kvartilius. Kokio dydžio batų reikia užsakyti daugiausiai?

8. Raskite atsitiktinio dydžio modą, kvartilius ir medianą, kai atsitiktinio dydžio skirstinys yra:

a)

$x_i =$	-2	0	2	3	4	5
$p_i =$	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

b)

$x_i =$	1	3	4	6	7
$p_i =$	0,2	0,4	0,1	0,15	0,15

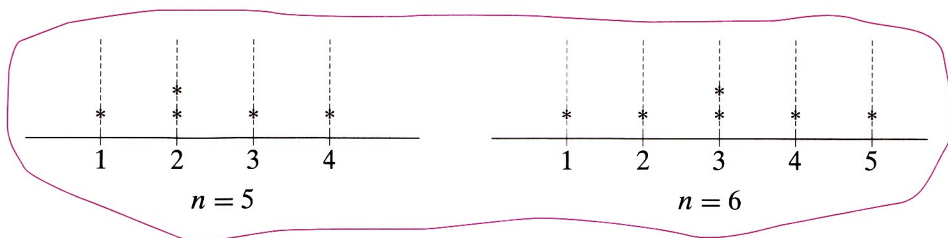
c)

$x_i =$	-2	-1	0	1	2	3	4	8
$p_i =$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$

d)

$x_i =$	-5	-4	-3	0	1	2	3
$p_i =$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$

9. Ar imties moda gali būti lygi pirmajam imties kvartiliui? O lygi imties medianai? Panagrinėkite brėžiniuose pavaizduotas imtis ir atsakykite į šiuos klausimus. Brėžiniuose imties duomenys pažymėti žvaigždutėmis.



Sugalvokite pavyzdį imties, kurios moda būtų lygi trečiajam kvartiliui.

14.4. Imties vidurkis ir dispersija

Imtis — tai duomenų (dažniausiai skaičių) eilė, kurią gauname atlikę tyrimą. Tyrimai būna įvairūs. Tai gali būti kokia nors apklausa, tačiau gali būti ir matematikos kontrolinis...

1 PAVYZDYS. Dešimties moksleivių matematikos kontrolinio darbo rezultatai įvertinti tokiais pažymiais:

9, 8, 8, 7, 6, 6, 10, 7, 8, 9.

Koks šios pažymių imties vidurkis?
Kaip skaičiuoti vidurkį, visi gerai žinome: reikia visus imties skaičius sudėti ir gautąją sumą padalyti iš elementų skaičiaus. Taigi pažymių imties vidurkis yra

$$\frac{9+8+8+7+6+6+10+7+8+9}{10} = 7{,}8.$$

APIBRĖŽIMAS
Imties $x_1, \ldots, x_n$ vidurkiu vadinamas jos duomenų aritmetinis vidurkis $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Imties vidurkį patogu skaičiuoti turint dažnių lentelę. Jei imtyje reikšmės x_1, x_2, ... pasikartoja atitinkamai f_1, f_2, ... kartų, tai dažnių lentelė tokia:

$x_i =$	x_1	x_2	...
$f_i =$	f_1	f_2	...
$\frac{f_i}{n} =$	$\frac{f_1}{n}$	$\frac{f_2}{n}$	...

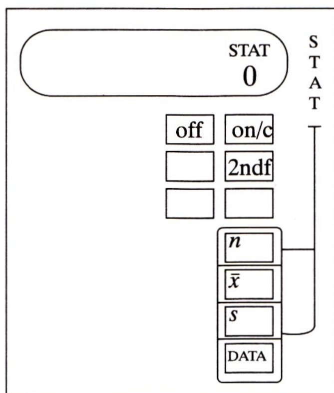
Tada tokios imties reikšmių vidurkis

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots}{n},$$

arba

$$\bar{x} = x_1 \frac{f_1}{n} + x_2 \frac{f_2}{n} + \cdots .$$

Imties vidurkį labai patogu skaičiuoti naudojantis kišeniniais skaičiuokliais, kuriuose yra mygtukai statistikos dydžiams skaičiuoti. Šie mygtukai paprastai būna apvesti linijomis ir pažymėti STAT.



Paspaudus mygtukus 2ndf ir on/c įjungiami statistikos dydžių mygtukai (ekrane pasirodo užrašas STAT).
Dabar skaičiuojant imties $x_1, \ldots, x_n$ vidurkį vieną po kito renkame skaičius $x_1, x_2, \ldots,$ po kiekvieno skaičiaus spausdami mygtuką DATA. Įvedus paskutinį skaičių, pakanka paspausti mygtuką, virš kurio užrašyta $\bar{x}$ — ir imties vidurkis skaičiuoklio ekrane!

1 užduotis. Vienos klasės dešimties mokinių matematikos kontrolinio darbo pažymiai yra

$$7, \quad 8, \quad 6, \quad 9, \quad 10, \quad 8, \quad 7, \quad 6, \quad 9, \quad 7.$$

Tų pačių mokinių chemijos kontrolinio darbo pažymiai yra

$$9, \quad 8, \quad 7, \quad 6, \quad 6, \quad 5, \quad 9, \quad 8, \quad 10, \quad 8.$$

Kurio kontrolinio — matematikos ar chemijos pažymių vidurkis didesnis?

Imties vidurkis yra skaičius, apie kurį yra išsisklaidę kiti imties duomenys. Tą patį vidurkį gali turėti labai įvairios imtys.
Pavyzdžiui, apskaičiavę imties

$$3, \quad 1, \quad 0, \quad 4, \quad 1, \quad 3$$

vidurkį gautume $\bar{x} = 2$.
Imties

$$-8, \quad 4, \quad -2, \quad 7, \quad 12, \quad 6, \quad 0, \quad -3$$

vidurkis irgi lygus 2, t. y.

$$\bar{x} = 2.$$

Vos pažvelgę į abi imtis pastebėsime, kad jos skiriasi ne tik duomenų kiekiu, bet ir išsisklaidymu. Antrosios imties skaičiai yra išsisklaidę labiau. Tačiau tai tik bendras, žvilgtelėjus į imtis susidarytas įspūdis. Norėdami palyginti dviejų ar daugiau imčių duomenų išsisklaidymus, turime išsisklaidymų didumus išreikšti skaičiais. Panašiai darėme nagrinėdami atsitiktinius dydžius. Apskaičiavę atsitiktinio dydžio X reikšmių $x_1, \ldots, x_m$ nuokrypių nuo matematinės vilties

$$\mathbf{E}X = a$$

kvadratus

$$(x_1 - \mathbf{E}X)^2, (x_2 - \mathbf{E}X)^2, \ldots, (x_m - \mathbf{E}X)^2,$$

skaičiavome šių nuokrypių vidurkį, t. y. atsitiktinio dydžio X dispersiją

$$\mathbf{D}X = (x_1 - \mathbf{E}X)p_1 + \cdots + (x_m - \mathbf{E}X)^2 p_m,$$

čia $p_1, \ldots, p_m$ — atsitiktinio dydžio X reikšmių $x_1, \ldots, x_m$ tikimybės. Atsitiktinio dydžio dispersija apibūdina reikšmių išsibarstymo didumą.
Dabar nagrinėjame ne atsitiktinį dydį, bet atsitiktinę imtį, t. y. atlikus tyrimą gautų duomenų rinkinį

$$x_1, \ldots, x_n.$$

Galime įsivaizduoti, kad šie skaičiai gauti atlikus n nepriklausomų tam tikro atsitiktinio dydžio X stebėjimų. Jeigu žinotume šio atsitiktinio dydžio matematinę viltį

$$\mathbf{M}X = a,$$

tai reikšmių išsisklaidymo didumą geriausia būtų nusakyti skaičiumi

$$\frac{(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \cdots + (x_n - a)^2}{n}. \qquad (1)$$

Matematinės vilties $\mathbf{M}X = a$ reikšmių nežinome, tačiau vietoje jos galėtume imti imties vidurkį

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

ir reikšmių išsibarstymo didumą nusakyti dydžiu

$$\frac{(x_1 - \bar{x}) + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}.$$

Nagrinėdami imtis statistikai nustatė, kad pakeitus reiškinyje a į $\bar{x}$, kartu ir vardiklį n geriau pakeisti į $n - 1$. Šitaip gaunamas geresnių savybių turintis imties duomenų išsisklaidymo matas.

APIBRĖŽIMAS
Imties $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n > 1)$ dispersija vadiname skaičių

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}.$$

Imties standartiniu kvadratiniu nuokrypiu vadiname skaičių

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}}.$$

Imties standartinį nuokrypį s, kaip ir imties vidurkį, labai paprasta skaičiuoti kišeniniu skaičiuokliu su statistikos dydžių skaičiavimo mygtukais. Įvedus duomenis kaip skaičiuojant vidurkį, užtenka paspausti mygtuką su užrašu s.
Apskaičiavę, pavyzdžiui, minėtų imčių

$$3, \quad 1, \quad 0, \quad 4, \quad 1, \quad 3$$

ir

$$-8, \quad 4, \quad -2, \quad 7, \quad 12, \quad 6, \quad 0, \quad -3$$

standartinius nuokrypius, gausime

$$s \approx 1{,}549$$

ir

$$s \approx 6{,}437.$$

Taigi antrosios imties standartinis nuokrypis (ir dispersija) yra didesnis. Šios imties duomenys išsisklaidę plačiau negu pirmosios imties duomenys.

2 užduotis. Apskaičiuokite ir palyginkite 1 užduoties duomenų standartinius nuokrypius.

Sudarydami imtį, t. y. matuodami atrinktųjų objektų požymį, tarsi atliekame nepriklausomo atsitiktinio dydžio stebėjimus. Nežinome nei šio atsitiktinio dydžio, nei vidurkio, nei dispersijos. Tačiau pagal imties duomenis galime apskaičiuoti duomenų santykinius dažnius, imties vidurkį ir dispersiją. Kai imtis didelė, tai labai tikėtina, kad imties vidurkio ir dispersijos reikšmės bus artimos nežinomoms atsitiktinio dydžio vidurkio ir dispersijos reikšmėms.

Pratimai ir uždaviniai

10. Toje pačioje vietovėje skirtingais metų laikais aštuonias dienas iš eilės buvo matuojama oro temperatūra. Gauti tokie duomenys:

a) +3, +5, +3, +6, +5, +6, +7, +6;

b) +1, 0, 0, −2, +1, +2, +1, +3;

c) −5, −4, −5, −8, −2, −1, −4, −3;

d) +15, +14, +10, +18, +19, +18, +16, +15.

Kokia kiekvienos matavimų serijos vidutinė temperatūra? Kurioje matavimų serijoje temperatūros išsisklaidymas apie vidurkį didžiausias ir kurioje — mažiausias?

11. a) Trijų klasių 12^a, 12^b ir 12^c moksleiviai rašė to paties dalyko kontrolinį darbą. Jie gavo tokius pažymius:

12^a — 10, 7, 8, 9, 8, 10, 9, 4, 8, 8, 10, 6, 7, 6;

12^b — 9, 9, 7, 10, 9, 9, 10, 7, 9, 8, 8, 8;

12^c — 10, 7, 9, 9, 10, 9, 9, 8, 6, 10, 8, 5, 10, 8, 7, 4.

Nustatykite, kurioje klasėje pažymių vidurkis didžiausias. Apskaičiavę imties dispersiją ir standartinį nuokrypį, nustatykite, kuri klasė labiausiai „vienalytė“, t. y. moksleivių žinių įvertinimai mažiausiai išsisklaidę apie vidurkį.

b) Atsakykite į tuos pačius klausimus, kaip a) dalyje, kai moksleivių gautieji pažymiai yra tokie:

12^a — 5, 8, 9, 9, 10, 9, 8, 9, 8, 4, 9, 6;

12^b — 8, 9, 8, 9, 6, 4, 8, 10, 9, 5, 7, 7;

12^c — 5, 7, 3, 8, 9, 8, 8, 10, 7, 10, 10, 3.

12. Autosalone kiekvieną dieną parduotų automobilių skaičių vieno mėnesio duomenys tokie:

I sav.	5, 3, 4, 3, 5, 2, 3;	II sav.	1, 0, 2, 1, 1, 2, 2;
III sav.	1, 3, 2, 7, 5, 6, 4;	IV sav.	0, 0, 5, 2, 1, 2, 1.

Apskaičiuokite, kiek vidutiniškai buvo parduota automobilių kiekvieną savaitę. Kurią savaitę parduotų kiekvieną savaitės dieną automobilių skaičius labiausiai svyravo apie vidurkį?

13. Šešių grupių po 10 jaunuolių, įsigijusių batus „Bato“ parduotuvėje, avalynės dydžiai tokie:

a) 41, 42, 44, 40, 44, 45, 43, 42, 43, 45;

b) 44, 43, 45, 46, 45, 44, 44, 43, 42, 42;

c) 42, 43, 44, 43, 42, 41, 42, 43, 44, 42;

d) 40, 41, 42, 41, 42, 41, 43, 45, 44, 45;

e) 45, 43, 40, 45, 44, 44, 43, 43, 44, 43;

f) 43, 43, 42, 45, 45, 43, 42, 41, 40, 44.

Koks vidutinis kiekvienos grupės avalynės dydis? Kuri grupė turi didžiausią dispersiją, kuri — mažiausią?

14.5. Požymių koreliacija

Požymius dažnai reiškiame skaičiais. Pavyzdžiui, polinkį pramogauti galime nusakyti per dieną pramogoms (filmams, koncertams, kompiuteriniams žaidimams, ...) skirtų valandų skaičiumi, o ryžtą mokytis — valandų, praleistų prie knygų ruošiant pamokas ar šiaip lavinantis, skaičiumi. Šie dydžiai nėra pastovūs, jie priklauso nuo daugelio aplinkybių, vadinasi, yra atsitiktiniai.

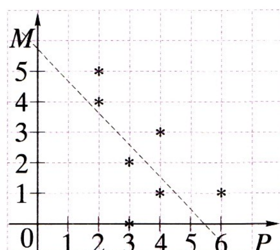
1 PAVYZDYS. Visą savaitę moksleivis kasdien kruopščiai fiksavo, kiek valandų jis skyrė pramogoms, kiek — mokymuisi (neįskaitant laiko, praleisto mokykloje).

Savaitės diena	I	II	III	IV	V	VI	VII
Valandų, skirtų pramogoms, skaičius P	2	2	4	3	3	6	4
Valandų, skirtų mokymuisi, skaičius M	5	4	1	2	0	1	3

Jeigu šiuos duomenis, pavaizduosime koordinačių plokštumoje taškais

$$(p_i; m_i) \quad (i = 1, \ldots, 7),$$

čia p_i — dydžio P, o m_i — dydžio M reikšmės, gausime duomenų sklaidos diagramą.



Diagramos taškai nėra vienoje tiesėje, tačiau tarsi grupuojasi apie vieną tiesę. Taigi ryšys tarp atsitiktinių dydžių P ir M primena tiesinį ryšį

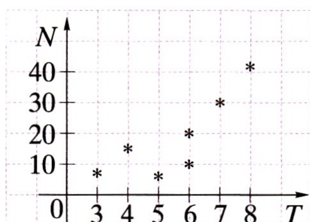
$$y = ax + b$$

su neigiamu koeficientu a.

2 PAVYZDYS. Visą atostogų savaitę aistringas žvejys žvejojo. Be to kiekvienos dienos vakare jis užsirašydavo, kiek valandų jis praleido žvejyboje ir kiek žuvų sugavo.

Savaitės diena	I	II	III	IV	V	VI	VII
Žvejybos valandų skaičius T	6	5	7	6	4	3	8
Sugautų žuvų skaičius N	10	7	30	20	15	8	43

Pavaizduokime duomenis koordinačių plokštumoje, t. y. sudarykime duomenų sklaidos diagramą.

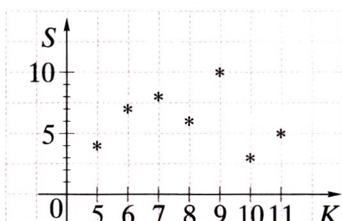


Iš diagramos taip pat galime spėti, kad duomenys grupuojasi apie tam tikrą tiesę $y = ax + b$, tik šį kartą jau su teigiamu krypties koeficientu a.

3 PAVYZDYS. Knygyno savininkas nutarė patikrinti spėjimą, kad žmonės labiau perka pigesnes knygas. Vakare jis suskaičiavo, kiek per dieną nupirkta 5, 6, 7, 8, 9, 10 ir 11 litų kainavusių knygų.

Knygos kaina K	5	6	7	8	9	10	11
Nupirktų knygų skaičius S	4	7	8	6	10	3	5

Nubraižykime duomenų sklaidos diagramą



Pažiūrėję į diagramą, vargu ar patikėsime, kad pigesnes knygas žmonės perka dažniau. Tikriausiai žmonės knygas renkasi ne pagal kainą. Neatrodo, kad diagramos taškai grupuotųsi apie kokią nors tiesę.

Imties duomenų išsisklaidymo didumą nusakome vieninteliu skaičiumi — imties dispersija. Ar galima ir dviejų požymių ryšio panašumą į tiesinį įvertinti nebraižant duomenų sklaidos diagramos, bet nurodant tik skaičių?
Taip, galima. Iš pradžių truputį pasvarstykime.
Išmatavę atrinktųjų objektų požymius, gauname duomenų poras:

$$x_1 \text{ ir } y_1; \quad x_2 \text{ ir } y_2; \quad \ldots; \quad x_n \text{ ir } y_n.$$

Kiekvieno iš abiejų požymių duomenis nagrinėdami atskirai, galime apskaičiuoti imčių vidurkius ir standartinius nuokrypius:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \quad s_x = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}};$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}, \quad s_y = \sqrt{\frac{(y_1 - \bar{y})^2 + \cdots + (y_n - \bar{y})^2}{n-1}}.$$

O dabar kiekvienai duomenų porai sudarykime nuokrypių nuo vidurkių sandaugą:

$$(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}), (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}), \ldots, (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y}). \quad (1)$$

Tarkime, kad duomenys yra tokie, kad pavaizdavus poras $(x_i; y_i)$ koordinačių plokštumos taškais, matyti, jog jie grupuojasi apie tiesę su neigiamu krypties koeficientu (kaip 1 pavyzdyje).
Todėl porų $(x_i; y_i)$ su didesnėmis x_i reikšmėmis duomenų y_i reikšmės yra mažesnės, o su mažesnėmis x_i reikšmėmis — y_i reikšmės didesnės. Taigi tikėtina, kad daugumai porų $(x_i; y_i)$ su $x_i > \bar{x}$ bus teisinga nelygybė $y_i < \bar{y}$, o daugumai porų $(x_i; y_i)$ su $x_i < \bar{x}$ bus teisinga nelygybė $y_i > \bar{y}$. Abiem atvejais $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) < 0$.
Todėl kai duomenų sklaidos diagramos taškai išsidėstę apie tiesę su neigiamu krypties koeficientu, tai (1) sekoje vyrauja neigiami nariai, ir suma

$$(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \cdots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y}) \quad (2)$$

taip pat neigiama. Kai duomenų sklaidos diagramos taškai išsidėstę apie tiesę su teigiamu krypties koeficientu, (1) sekoje vyrauja teigiami nariai, o (2) suma teigiama. Šios sumos ženklas tarsi parodo apie kokią tiesę — su teigiamu ar neigiamu krypties koeficientu — linkę grupuotis duomenų sklaidos taškai.
Panaudosime šią sumą dviejų požymių ryšio skaitinei charakteristikai — koreliacijos koeficientui apibrėžti.

APIBRĖŽIMAS

Jeigu matuojant du atrinktųjų objektų požymius X ir Y gauti duomenys

$$x_1, x_2, \ldots, x_n; \quad y_1, y_2, \ldots, y_n \ (n > 1),$$

tai šių požymių koreliacijos koeficientu vadiname skaičių

$$r = \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \cdots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{(n-1) \cdot s_x \cdot s_y},$$

čia $\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$, $\bar{y} = \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}$, $s_x = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}}$,
$s_y = \sqrt{\frac{(y_1 - \bar{y})^2 + \cdots + (y_1 - \bar{y})^2}{n-1}}$.

Primename, kad dydžius $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_x, s_y labai paprasta apskaičiuoti naudojantis skaičiuokliu su statistinių skaičiavimų mygtukais.

Jeigu dviejų požymių koreliacijos koeficientas teigiamas, sakome, kad požymiai teigiamai koreliuoti, jei neigiamas — neigiamai koreliuoti. Jeigu koreliacijos koeficientas lygus nuliui, sakome, kad požymiai yra nekoreliuoti.

Skaičiuojant koreliacijos koeficientą dažnai patogu naudotis tokia formule:

$$r = \frac{(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) - n(\bar{x} \cdot \bar{y})}{(n-1) \cdot s_x \cdot s_y}.$$

Koreliacijos koeficientas r priklauso skaičių intervalui $[-1; 1]$. Jei $r = -1$, tai duomenų sklaidos diagramos taškai yra tiesėje, kurios krypties koeficientas neigiamas; jei $r = 1$, tai duomenų sklaidos diagramos taškai yra tiesėje, kurios krypties koeficientas teigiamas. Jei $r < 0$, bet $r \neq -1$, tai sklaidos diagramos taškai yra išsidėstę apie tiesę, kurios krypties koeficientas neigiamas, ir kuo r mažiau skiriasi nuo -1, tuo išsisklaidymas apie tokią tiesę yra mažesnis. Jei $r > 0$, $r \neq 1$, tai sklaidos diagramos taškai yra išsidėstę apie tiesę su teigiamu krypties koeficientu, kuo mažiau r skiriasi nuo 1, tuo išsisklaidymas apie tokią tiesę mažesnis.
Jei $r = 0$, tai sakome, kad tiesinio ryšio tarp požymių nėra.
Patikrinkime, ar tai, kas pasakyta apie koreliacijos koeficientą, panašu į teisybę, naudodamiesi 1 pavyzdžio duomenimis. Apskaičiuokime 1 pavyzdžio požymių koreliacijos koeficientą. Skaičiai x_i yra dydžio P reikšmės, o skaičiai y — dydžio M reikšmės.

P	2	2	4	3	3	6	4
M	5	4	1	2	0	1	5

Apskaičiavę gauname $\overline{P} \approx 3{,}43$, $s_P \approx 1{,}4$; $\overline{M} \approx 2{,}57$, $s_M \approx 2{,}07$.
Apskaičiuokime dydžių sandaugų sumą

$$\sum_{i=1}^{n} p_i m_i = 54.$$

Taigi

$$r = \frac{54 - 7 \cdot 3{,}43 \cdot 2{,}57}{6 \cdot 1{,}43 \cdot 2{,}07} \approx -0{,}43,$$

t. y. požymių, kurių sklaidos diagramos taškai išsidėstę apie tiesę su neigiamu krypties koeficientu, koreliacijos koeficientas yra neigiamas.

Užduotis. Apskaičiuokite 2 ir 3 pavyzdžių požymių koreliacijos koeficientus. Antrojo pavyzdžio skaičiams turėtume gauti teigiamą, o trečiojo — neigiamą nedidelio absoliutinio didumo skaičių.

Pratimai ir uždaviniai

14. Poliklinikos gydytojos darbas — vykti pas ligonius pagal iškvietimus. Ji pastebėjo, kad kuo diena šaltesnė, tuo iškvietimų daugiau. Norėdama pagrįsti savo spėjimą, ji dešimt žiemos dienų iš eilės užsirašydavo vidutinę dienos temperatūrą ir iškvietimų skaičių:

Vidutinė dienos temperatūra T	-5	-3	-4	-7	-8	-6	-9	-10	-10	-7
Iškvietimų skaičius N	4	1	2	3	4	3	3	5	4	6

Apskaičiuokite dydžių T ir N koreliacijos koeficientą.
Pavaizduokite gautąsias reikšmes sklaidos diagrama.
Ar pritartumėte nuomonei, kad ryšys tarp kintamųjų T ir N primena tiesinę priklausomybę?

15. Ar kompiuteris netrukdo mokslui? Norėdami tai išsiaiškinti, tėvai 3 mėnesius stebėjo, kiek valandų jų sūnus praleisdavo prie kompiuterio ir kokius gaudavo pažymius.

Savaitės	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Prie kompiuterio praleistų valandų skaičius T	7	8	10	15	8	7	15	14	13	10	7	6
Savaitės pažymių vidurkis V	7,6	8,1	9,2	7,3	6,5	6,4	6,5	7,1	8,7	9	8,2	7,3

Apskaičiuokite dydžių T ir V koreliacijos koeficientą.
Ar galima teigti, kad tarp dydžių T ir V yra panašus į tiesinę priklausomybę ryšys?

15. Kartojimo uždaviniai

1. Ūkininkas augina keturių veislių A, B, C ir D bulves. Jis nusprendė patikrinti, kuri veislė derlingesnė. Atsitiktinai pasirinkęs po 20 kiekvienos veislės bulvių kerų, jis suskaičiavo, kiek bulvių užderėjo po kiekvienu keru, ir gavo tokius rezultatus:

   veislės A — 2, 5, 3, 7, 10, 10, 6, 4, 2, 7, 8, 13, 15, 12, 10, 4, 6, 3, 13, 16;
   veislės B — 7, 7, 8, 9, 7, 10, 11, 11, 12, 13, 9, 8, 7, 5, 4, 12, 11, 10, 11, 8;
   veislės C — 9, 7, 6, 3, 2, 5, 3, 8, 6, 10, 15, 13, 13, 9, 8, 6, 7, 9, 10, 9;
   veislės D — 5, 4, 3, 8, 9, 7, 9, 12, 14, 10, 9, 8, 5, 6, 13, 9, 8, 10, 7, 12.

   a) Sudarykite šių imčių dažnių, santykinių dažnių ir sukauptųjų santykinių dažnių lenteles.
   b) Nubraižykite stulpelines santykinių dažnių diagramas.
   c) Nubraižykite skritulines dažnių diagramas.
   d) Raskite imčių modas, medianas ir kvartilius.
   e) Sugrupuokite imtis suskaidę intervalą [1,5; 16,5] (į jį patenka visų keturių imčių reikšmės) į 5 lygias dalis ir sudarykite sugrupuotų imčių dažnių ir santykinių dažnių lenteles; nubraižykite histogramą.
   f) Koks yra kiekvienos bulvių veislės imties vidurkis?
   g) Apskaičiuokite kiekvienos imties standartinį nuokrypį.
   h) Kurias bulvių veisles siūlytume auginti ūkininkui, remdamiesi gautaisiais imčių analizės rezultatais?

2. Meteorologai, norėdami nustatyti, kuris mėnuo — liepa ar rugpjūtis labiau vėjuotas, kiekvieną vidudienį matavo vėjo greitį. Šių matavimų rezultatai (m/s) tokie:

   liepa — 2, 1, 3, 7, 4, 10, 15, 20, 10, 11, 10, 7, 6, 4, 5, 3, 3, 3, 5, 8, 10, 3, 1, 10, 9, 15, 13, 9, 8, 4, 1;
   rugpjūtis — 1, 5, 6, 4, 8, 10, 12, 11, 4, 5, 3, 8, 9, 7, 4, 8, 11, 12, 15, 17, 14, 10, 9, 4, 3, 2, 2, 2, 4, 5, 3.

   a) Sudarykite šių imčių dažnių ir sukauptųjų dažnių lenteles.
   b) Koks vėjo greitis vyrauja liepą ir koks — rugpjūtį?
   c) Raskite kiekvienos imties kvartilius ir medianą.
   d) Apskaičiuokite vidutinį vėjo greitį liepą ir vidutinį vėjo greitį rugpjūtį.
   e) Kokie imčių standartiniai nuokrypiai?

3. Miškininkas, tikrindamas miško brandą, išmatavo 25 atsitiktinai parinktų medžių skersmenis (cm): 23, 47, 25, 41, 28, 38, 26, 33, 36, 42, 35, 36, 41, 46, 35, 33, 28, 41, 37, 29, 35, 34, 28, 41, 35.
   a) Apskaičiuokite vidutinį medžių skersmenį.
   b) Kokia imties dispersija?

c) Sugrupuokite imtį, intervalą [22; 47] suskaidę į 5 lygias dalis; sudarykite sugrupuotos imties dažnių ir santykinių dažnių lentelę; nubraižykite histogramą; nurodykite intervalą, kuriame yra daugiausia duomenų.

4. Ar grūdų derlingumas priklauso nuo trąšų kiekio? Tikriausiai, tačiau daug įtakos turi ir kiti faktoriai — dirvožemio kokybė, kritulių kiekis, oro temperatūra ir pan. Ištirkite derlingumo priklausomybę nuo įterptų trąšų kiekio pagal 10 bandomųjų sklypų rezultatus:

X	0,6	1,1	1,1	0,7	0,8	1	1,2	0,6	1	0,9
Y	27	32	33	30	30	33	34	29	31	32

čia X — trąšų kiekis (tonomis viename ha), Y — derlingumas (centneriais iš vieno hektaro).

a) Nubraižykite duomenų $(X; Y)$ sklaidos diagramą.

b) Apskaičiuokite $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_x, s_y.

c) Apskaičiuokite požymių X ir Y koreliacijos koeficientą.

5. Du kaimynai — Liutauras ir Sigitas, turintys panašius butus, nuolat ginčijasi, kuris elektros energijos sunaudoja mažiau. Tačiau lygindami 12 mėnesių elektros skaitiklių rodmenis jie atsakyti į šį kausimą negalėjo, nes kai kuriais mėnesiais elektros energijos daugiau suvartoja Liutauras, o kai kuriais — Sigitas. Gal jūs padėsite išspręsti kaimynų ginčą paanalizavę 12 mėnesių kaimynų elektros skaitiklių rodmenų kilovatvalandėmis imtis?

	Mėnuo											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Liutauro kWh (X)	325	310	280	250	235	210	180	190	230	280	300	310
Sigito kWh (Y)	300	320	270	240	230	220	200	180	240	270	320	325

a) Sudarykite duomenų $(X; Y)$ sklaidos diagramą.

b) Apskaičiuokite imčių vidurkius $\bar{x}$ ir $\bar{y}$ bei standartinius nuokrypius s_x ir s_y.

c) Apskaičiuokite požymių X ir Y koreliacijos koeficientą.

6. Pasiūlos-paklausos dėsnis teigia, kad didėjant prekės kainai paklausa mažėja. Lentelėje surašytos įvairios tam tikros prekės kainos ir atitinkamai šiomis kainomis parduoti prekių kiekiai.

Kaina (X Lt)	1,5	2	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
Paklausa (Y vnt.)	1200	900	800	550	500	350	300	100

a) Nubraižykite imties $(X; Y)$ sklaidos diagramą.

b) Apskaičiuokite $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_x, s_y.

c) Apskaičiuokite požymių X ir Y koreliacijos koeficientą.

7. Kiek yra natūraliųjų skaičių, mažesnių už 1000, kurie nesidalija nei iš 5, nei iš 7?
Kiek yra tokių skaičių, kurie nesidalija nei iš 3, nei iš 5, nei iš 7?

8. Suprastinkite reiškinį

$$\frac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{\sqrt{(a+b)^2-4ab}},$$

jei $a > b > 0$.

9. Įrodykite, kad jei $a + b + c = 0$, tai $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

10. Apskritimo formos dviračių treko spindulys R metrų. Treko takeliu pastoviais greičiais ta pačia kryptimi važiuoja du dviratininkai. Pirmasis vieną ratą nuvažiuoja 4 s greičiau negu kitas ir aplenkia jį kas 2 min. Kokiais greičiais (m/s) važiuoja dviratininkai? Koks yra treko takelio spindulys R, jeigu pirmasis dviratininkas per 1 h nuvažiuoja 50 km? Kiek ratų nuvažiuoja antrasis dviratininkas per 1 h?

11. Įrodykite, kad bet kokiems neneigiamiems skaičiams a ir b teisinga lygybė

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

12. Apskaičiuokite

$$100^{\frac{1}{2}-\lg \sqrt[4]{4}}.$$

13. Raskite lygties

$$1+\cos x+\cos\frac{x}{2}=0$$

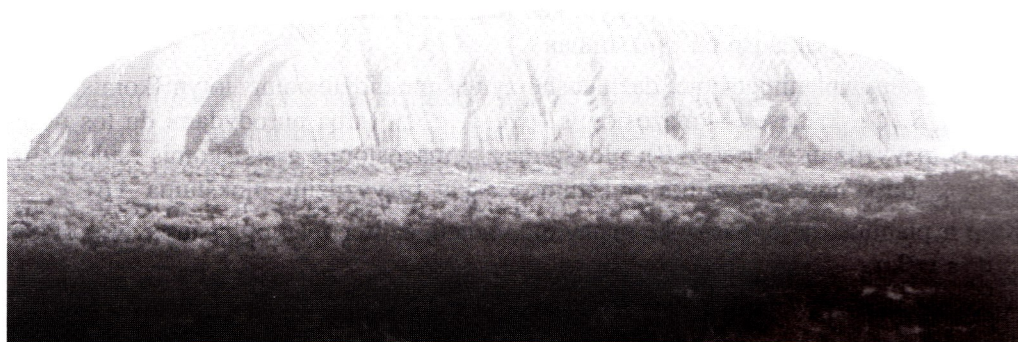
sprendinį, priklausantį intervalui $(180^\circ; 360^\circ)$.

14. Parabolės $y = x^2$ liestinė kerta abscisių ašį taške $x = 1$. Raskite bendrą parabolės ir liestinės tašką.

15. Šachmatų karalius grasina tik toms figūroms, kurios yra gretimuose su juo langeliuose. Kiek daugiausia karalių galima sustatyti šachmatų lentoje, kad jie negrasintų vieni kitiems?

16. Atsitiktinai sutiktas žmogus gali su ta pačia tikimybe būti gimęs bet kurį metų mėnesį. Kokia tikimybė, kad 12 sutiktų žmonių bus gimę skirtingais mėnesiais?

V Erdvės geometrija



16. Tiesės ir plokštumos

16.1. Stereometrijos aksiomos

Taškai ir tiesės yra pagrindinės planimetrijos sąvokos. Naudodamiesi jomis apibrėžiame atkarpas, trikampius ir kitas figūras. Tiesa, nagrinėdami jas įsivaizduojame dar vieną begalinę „figūrą" — plokštumą, kurioje yra visi taškai ir tiesės... Taigi, planimetrija nagrinėja figūras, kurios yra vienoje plokštumoje, tarsi vienoje šalyje.

O dabar prisiminkime, kad gali būti ne viena plokštuma. Kitaip tariant, papildykime pagrindinių objektų sąrašą.

Taigi dabar pagrindiniai mūsų objektai yra: taškai, tiesės, plokštumos.

Nagrinėdami jas įsivaizduojame begalinę erdvę, kurioje yra visos plokštumos, tiesės, taškai. Todėl ir geometrijos dalį, kurią nagrinėsime, vadiname erdvės geometrija arba *stereometrija*.

Išvardijus pagrindinius objektus, reikia išvardyti paprasčiausius jų ryšius (sąryšius), kuriuos priimsime be įrodymo, t. y. išvardyti aksiomas.

Pirmiausia tarkime, kad taškams ir tiesėms, priklausantiems vienai plokštumai, teisingos visos planimetrijos aksiomos. Taigi kiekvienoje šalyje (t. y. plokštumoje) teisingi tie patys įstatymai (t. y. geometrijos dėsniai).

Lieka išvardyti aksiomas, nustatančias pagrindinius erdvės taškų, tiesių ir plokštumų sąryšius, tarsi kokius tarptautinius santykius. Šiuos santykius nustato trys pagrindinės aksiomos.

1 aksioma. *Kad ir kokia būtų plokštuma, yra erdvės taškų, nepriklausančių jai.*

2 aksioma. *Per bet kokius tris skirtingus erdvės taškus eina vienintelė plokštuma.*

3 aksioma. *Jeigu dvi plokštumos turi bendrą tašką, tai jos turi ir bendrą tiesę, kurioje yra visi bendri abiejų plokštumų taškai.*

Taigi dviem skirtingoms plokštumoms negali priklausyti lygiai vienas bendras taškas. Jeigu joms priklauso vienas taškas, tai priklauso ir visa tiesė.
Remiantis aksiomomis galima įrodyti, kad jeigu du tiesės taškai priklauso plokštumai, tai ir visa tiesė priklauso tai plokštumai.

Taškus, kaip ir planimetrijoje, dažniausiai žymėsime didžiosiomis lotyniškomis raidėmis A, B, C, ...; tieses — mažosiomis — a, b, c, ... (arba nurodydami du tos tiesės taškus, pavyzdžiui — tiesė AB); plokštumas — mažosiomis graikiškomis raidėmis α, β, γ, ... (arba nurodydami tris plokštumos taškus (pavyzdžiui, plokštuma ABC).

Kaip ir planimetrijoje, pasirinkę matavimo vienetą galime matuoti atstumą tarp dviejų erdvės taškų.

Atstumas tarp erdvės taškų A ir B yra atkarpos AB ilgis.

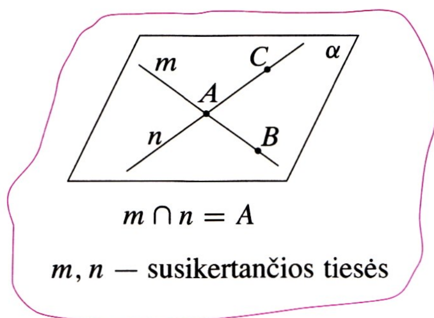
16.2. Tiesės erdvėje

Įsivaizduokime dvi tieses erdvėje.

Jeigu jos turi daugiau kaip vieną bendrą tašką, tai jos tiesiog sutampa.

Jeigu jos turi tik vieną bendrą tašką, jas vadiname susikertančiomis.

Nesunku įsitikinti, kad susikertančios tiesės yra vienoje plokštumoje. Pažymėkime bendrąjį susikertančių tiesių m, n tašką A, ir kiekvienoje iš tiesių pasirinkime dar po vieną tašką, pažymėkime juos B ir C.

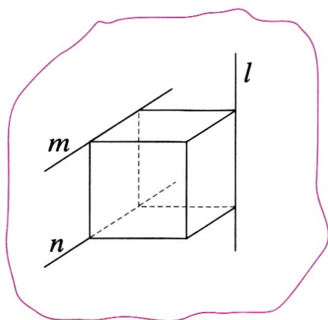


$m \cap n = A$

m, n — susikertančios tiesės

Iš antrosios aksiomos gauname, kad per taškus A, B ir C eina vienintelė plokštuma (pažymėkime ją raide α). Šiai plokštumai priklauso tiesės m taškai A ir B; vadinasi — ir visa tiesė. Analogiškai gauname, kad ir tiesė n yra plokštumoje α.

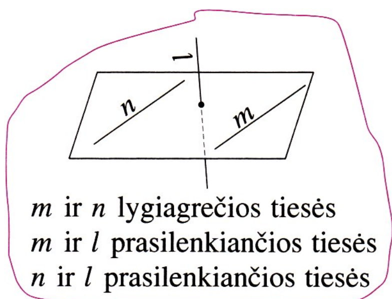
Dabar tarkime, kad dvi erdvės tiesės neturi bendrų taškų.



Pavyzdžiui, bendrų taškų neturi tiesės m ir n, kuriose yra dvi tos pačios kubo sienos briaunos. Bendrų taškų taip pat neturi ir tiesės m, l. Iš brėžinio matome, kad neturinčios bendrų taškų tiesės yra dviejų rūšių.

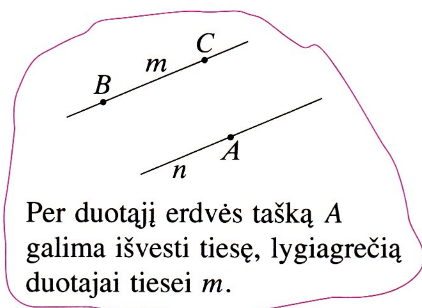
Jeigu tiesės m ir n neturi bendrų taškų ir yra vienoje plokštumoje, jos vadinamos *lygiagrečiomis*; žymima $m \parallel n$.

Jei tiesės m ir n neturi bendrų taškų ir nėra vienoje plokštumoje, jos vadinamos *prasilenkiančiomis*.



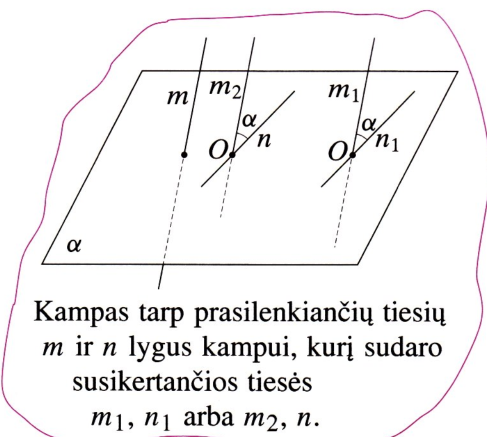
m ir n lygiagrečios tiesės
m ir l prasilenkiančios tiesės
n ir l prasilenkiančios tiesės

Jei m — tiesė, o A — nepriklausantis jai erdvės taškas, tai per tašką A galima išvesti vienintelę tiesę n, lygiagrečią m. Iš tikrųjų, parinkę tiesėje m du taškus B ir C, galime nubrėžti plokštumą, einančią per taškus A, B, C, o šioje plokštumoje — tiesę n, $n \parallel m$.



Per duotąjį erdvės tašką A galima išvesti tiesę, lygiagrečią duotajai tiesei m.

Jeigu erdvės tiesės m ir n kertasi, tai jos yra vienoje plokštumoje. Šioje plokštumoje jos sudaro kampus, kuriuos galime išmatuoti.
Panagrinėkime, kaip galima apibrėžti kampą tarp dviejų prasilenkiančių tiesių.



Kampas tarp prasilenkiančių tiesių m ir n lygus kampui, kurį sudaro susikertančios tiesės m_1, n_1 arba m_2, n.

Tegu m ir n yra dvi prasilenkiančios tiesės. Imkime kokį nors erdvės tašką O ir nubrėžkime per jį tieses m_1 ir n_1, lygiagrečias m ir n. Jų sudaromą kampą vadinsime kampu tarp prasilenkiančių tiesių m ir n.

Jeigu tašką O pasirinkome, pavyzdžiui, tiesėje n, tai kampui tarp prasilenkiančių tiesių nustatyti pakaks nubrėžti per O tiesę m_2, lygiagrečią m.

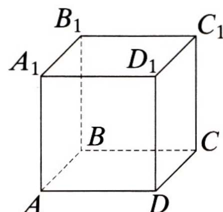
APIBRĖŽIMAS

Kampu tarp dviejų prasilenkiančių tiesių m ir n vadiname mažesnįjį kampą, kurį sudaro susikertančios tiesės m_1 ir n_1, $m_1 \parallel m$, $n_1 \parallel n$.

Užduotis. Įrodykite, kad dvi tiesės, einančios per skirtingas kubo briaunas, yra arba lygiagrečios, arba sudaro statų kampą.

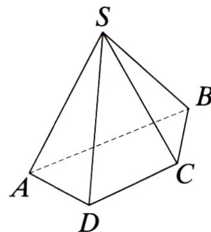
Pratimai ir uždaviniai

1. Surašykite tiesių, kuriose yra kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunos, poras:
a) susikertančių;
b) lygiagrečių;
c) prasilenkiančių.



2. Pavaizduokite kampą tarp prasilenkiančių tiesių, kuriose yra kubo briaunos BC ir A_1B_1.

3. Brėžinyje pavaizduota keturkampė piramidė $SABCD$. Nurodykite briaunas, kurios yra tiesėse, prasilenkiančiose su tiese:
a) SC; b) DC.



4. Kiek porų briaunų, esančių prasilenkiančiose tiesėse, turi trikampė piramidė?

5. Nubraižykite brėžinį, kuris paneigtų teiginį: „Dvi tiesės, kurių kiekviena yra prasilenkianti su trečiąja tiese, yra prasilenkiančios“.

6. Tiesės a ir b susikerta, o tiesė c lygiagreti tiesei a. Kokia gali būti tiesių b ir c tarpusavio padėtis?

7. Kokia gali būti tarpusavio padėtis dviejų tiesių, statmenų tai pačiai trečiajai? Skirtingas padėtis pavaizduokite brėžiniais.

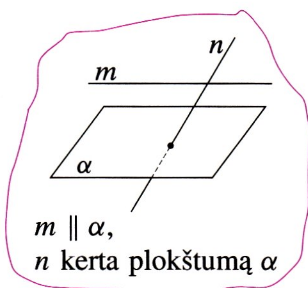
8. Kokia gali būti tarpusavio padėtis dviejų tiesių, iš kurių viena yra duotoje plokštumoje, o kita kerta tą plokštumą? Galimus atvejus pavaizduokite brėžiniais.

9. Prieštaros metodu įrodykite teoremą: „Jeigu viena iš dviejų tiesių yra plokštumoje, o kita tą plokštumą kerta taške, nepriklausančiame pirmajai tiesei, tai tos tiesės yra prasilenkiančios“.

16.3. Tiesė ir plokštuma

Įsivaizduokime erdvėje tiesę ir plokštumą. Jeigu tiesė ir plokštuma turi daugiau kaip vieną bendrą tašką, tai visa tiesė yra plokštumoje. Galimi dar du atvejai.

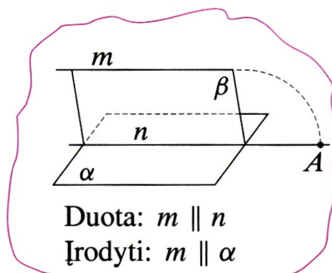
APIBRĖŽIMAS
Jeigu tiesė m su plokštuma α turi tik vieną bendrą tašką, tai sakome, kad m kerta plokštumą α. Jeigu tiesė m ir plokštuma α neturi bendrų taškų, tai sakome, kad m lygiagreti plokštumai α; žymime $m \parallel \alpha$.



Įrodysime tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymį.

TEOREMA
Jei plokštumoje nesanti tiesė yra lygiagreti kuriai nors toje plokštumoje esančiai tiesei, tai ta tiesė lygiagreti plokštumai.

Įrodymas. Tarkime, m nėra lygiagreti plokštumai α, t. y. m ir α turi bendrą tašką A.

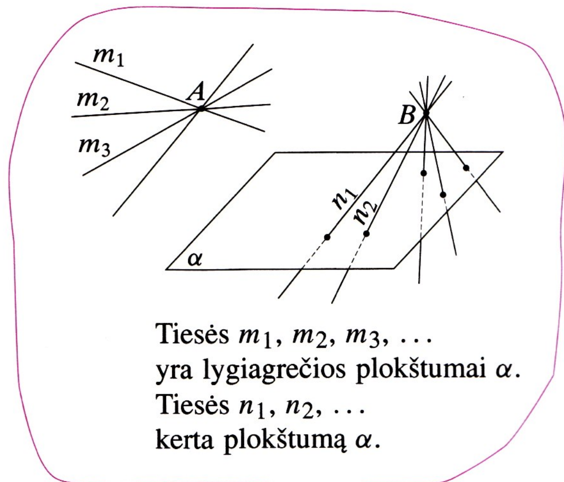


Per lygiagrečias tieses m ir n išveskime plokštumą β. Plokštumos α ir β kertasi tiese n. Kadangi taškas A yra ir plokštumos α, ir plokštumos β taškas, tai jis irgi turi būti tiesėje n. Gavome, kad dvi lygiagrečios tiesės m ir n turi bendrą tašką A. Taip būti negali, vadinasi, prielaida, kad m ir n turi bendrų taškų, yra neteisinga. Taigi $m \parallel \alpha$.
Teisinga ir šiai teoremai atvirkštinė teorema.

TEOREMA
Jeigu per tiesę m, lygiagrečią plokštumai α, išvesta plokštuma β kerta plokštumą α tiese n, tai tiesė m lygiagreti tiesei n.

Užduotis. Įrodykite šį teiginį prieštaros metodu.

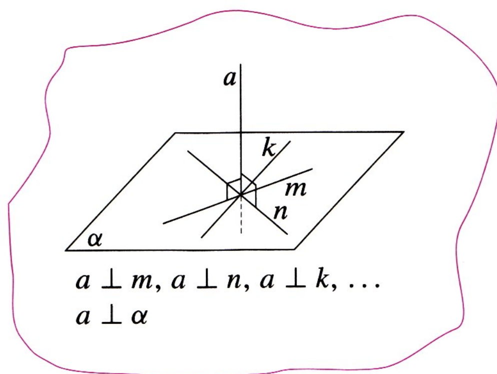
Per tašką, nepriklausantį plokštumai, galima nubrėžti be galo daug tiesių, lygiagrečių šiai plokštumai. Taip pat per duotąjį tašką galima nubrėžti be galo daug tiesių, kertančių šią plokštumą.



Iš visų šių tiesių išskirsime vieną.

APIBRĖŽIMAS

Tiesė a, kertanti plokštumą α, vadinama statmena tai plokštumai, jeigu ji yra statmena kiekvienai plokštumos tiesei, einančiai per tiesės a ir plokštumos α sankirtos tašką.

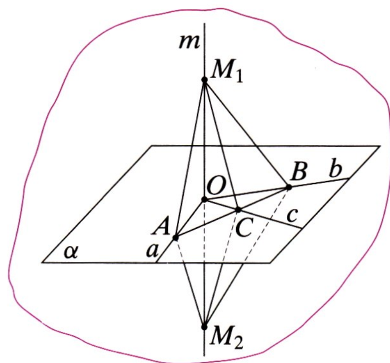


Jei tiesė a statmena plokštumai α, tai žymime $a \perp \alpha$.
Įrodysime tiesės ir plokštumos statmenumo požymį.

TEOREMA

Jei plokštumą kertanti tiesė yra statmena dviem tos plokštumos tiesėms, einančioms per tiesės ir plokštumos kirtimosi tašką, tai ta tiesė yra statmena plokštumai.

Duota: $m \cap \alpha = O$; tiesės a, b yra plokštumoje α ir eina per tašką O; $m \perp a$, $m \perp b$.
Įrodyti: $m \perp \alpha$.



Įrodymas. Reikia įrodyti, kad tiesė m yra statmena bet kuriai plokštumos α tiesei c, einančiai per tašką O.

Plokštumoje α nubrėžkime ketvirtąją tiesę, kertančią tieses a, b, c atitinkamai taškuose A, B, C. Tiesėje m nuo taško O į skirtingas puses atidėkime lygias atkarpas OM_1 ir OM_2. Taškus M_1 ir M_2 sujunkime su taškais A, B, C.

Trikampis M_1AM_2 yra lygiašonis, nes jo aukštinė AO yra ir pusiaukraštinė, taigi $AM_1 = AM_2$.

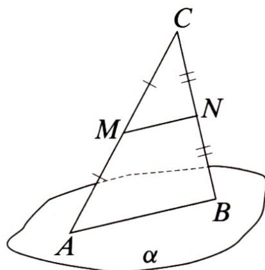
Trikampis M_1BM_2 yra lygiašonis, nes jo aukštinė BO yra ir pusiaukraštinė, taigi $BM_1 = BM_2$.

Tada $\triangle M_1AB = \triangle M_2AB$ pagal tris kraštines ($AM_1 = AM_2$, $BM_1 = BM_2$ ir AB — bendra.) Iš šių trikampių lygumo $\angle M_1BC = \angle M_2BC$. Taigi $\triangle M_1BC = \triangle M_2BC$ pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų ($BM_1 = BM_2$, BC — bendra, $\angle M_1BC = \angle M_2BC$). Iš šių trikampių lygumo $M_1C = M_2C$.

Trikampis M_1CM_2 yra lygiašonis ($M_1C = M_2C$), todėl jo pusiaukraštinė CO yra ir aukštinė. Įrodėme, kad $m \perp c$. Vadinasi, $m \perp \alpha$.

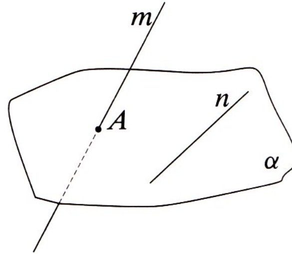
Pratimai ir uždaviniai

10. Trikampio ABC viršūnė C yra šalia plokštumos α, o kraštinė AB priklauso plokštumai. Įrodykite, kad trikampio vidurinė linija MN yra lygiagreti plokštumai α.

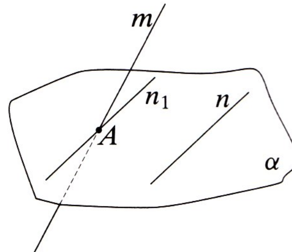


11. Tiesė lygiagreti plokštumai. Ar galima teigti, kad ji lygiagreti bet kuriai tiesei, esančiai toje plokštumoje?

Pavyzdys. Tiesė m kerta plokštumą α taške A. Tiesė n yra plokštumoje α. Per tiesę m išveskime plokštumą β, lygiagrečią tiesei n.



Sprendimas. Duota: $m \cap \alpha = A$, tiesė n yra plokštumoje α.
Išvesti: plokštumą β, kad m būtų plokštumoje β ir $\beta \parallel n$.



Plokštumoje α per tašką A brėžiame tiesę n_1, lygiagrečią tiesei n.
Per susikertančias tieses m ir n_1 išvedame plokštumą β.
Tiesė n lygiagreti plokštumai β, nes ji lygiagreti tos plokštumos tiesei n_1.

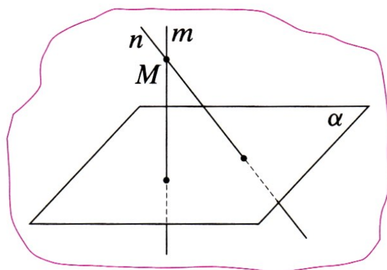
---

12. Per duotą tašką A, esantį šalia tiesės a, išveskite plokštumą, kuri būtų lygiagreti tiesei a. Kiek tokių plokštumų galima išvesti?

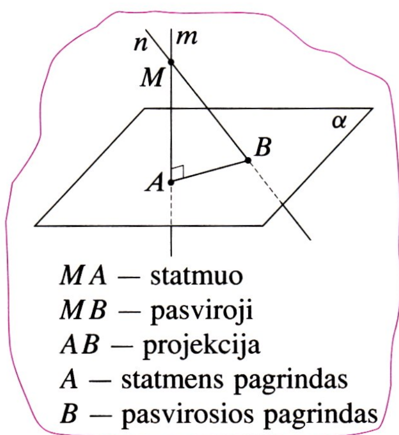
13. Per duotą tašką A, esantį šalia plokštumos α, išveskite tiesę, kuri būtų lygiagreti plokštumai α. Kiek tokių tiesių galima išvesti?

16.4. Statmuo ir pasviroji į plokštumą

Per tašką M, esantį šalia plokštumos α, galima nubrėžti be galo daug tiesių, kertančių šią plokštumą. Tegu m yra tiesė, einanti per tašką M ir statmena plokštumai α, o n — kita tiesė, einanti per tašką M.



Pažymėkime taškus, kuriuose šios tiesės kerta plokštumą α, A ir B. Atkarpą MA vadinsime statmeniu, nubrėžtu iš taško M į plokštumą α, MB — pasvirąja, o atkarpą AB — šios pasvirosios projekcija plokštumoje.



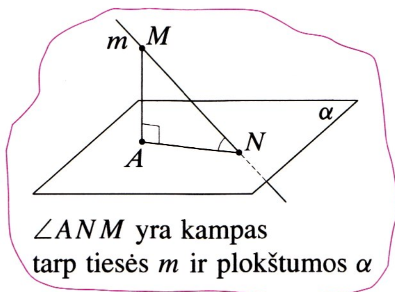
Trikampis ABM yra statusis, MB yra jo įžambinė, MA — statinis, todėl $MB > MA$. Taigi statmuo, nuleistas iš taško į plokštumą, yra trumpesnis už bet kurią pasvirąją.

APIBRĖŽIMAS
Taško atstumu iki plokštumos vadiname statmens, nuleisto iš taško į plokštumą, ilgį.

Jeigu tiesė statmena plokštumai, tai galime sakyti, jog ji su plokštuma sudaro 90° kampą. Jei tiesė nėra statmena plokštumai, kampu tarp tiesės ir plokštumos vadinsime kampą, kurį sudaro atitinkama pasviroji su savo projekcija.

APIBRĖŽIMAS

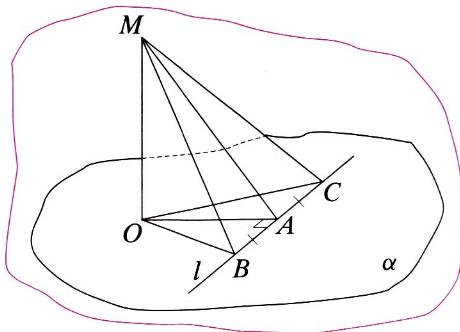
Tegu tiesė m nėra nei lygiagreti, nei statmena plokštumai α. Kampu, kurį ši tiesė sudaro su plokštuma, vadiname kampą, kurį sudaro šioje tiesėje esanti pasviroji su savo projekcija.



TEOREMA

Jei plokštumos tiesė, einanti per pasvirosios pagrindą, yra statmena pasvirosios projekcijai, tai ji statmena ir pasvirajai.

Duota: $MO \perp \alpha$, MA — pasviroji, tiesė l yra plokštumoje α, $A \in l$, $l \perp OA$.
Įrodyti: $l \perp MA$.



Įrodymas. Tiesėje l nuo taško A atidedame $AB = AC$ ir tašką M sujungiame su taškais B ir C. Statieji trikampiai OAB ir OAC lygūs pagal du statinius ($AB = AC$, OA — bendras). Iš šių trikampių lygumo $OB = OC$.
Statieji trikampiai MOB ir MOC taip pat lygūs pagal du statinius ($OB = OC$, MO — bendras). Iš šių trikampių lygumo $MB = MC$.
Įrodėme, kad trikampis BMC lygiašonis. Jo pusiaukraštinė MA yra ir aukštinė, taigi $MA \perp BC$. Įrodėme, kad $l \perp MA$.
Teisinga ir įrodytajai teoremai atvirkštinė teorema.

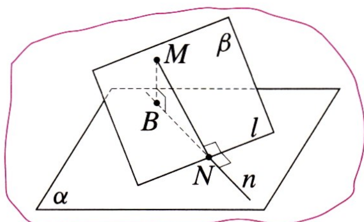
TEOREMA

Jei plokštumos tiesė, einanti per pasvirosios pagrindą, yra statmena pasvirajai, tai ji statmena ir pasvirosios projekcijai.

Užduotis. Naudodamiesi pateiktu brėžiniu įrodykite šią teoremą.

Patarimai: įrodykite, kad $\triangle MAB = \triangle MAC$, $\triangle MOB = \triangle MOC$; įrodykite, kad $\triangle BOC$ yra lygiašonis ir pasiremkite lygiašonio trikampio pusiaukraštinės, nubrėžtos į pagrindą, savybe.
Šios dvi teoremos vadinamos trijų statmenų teoremomis.

Iš taško, esančio šalia plokštumos, į plokštumą galima nubrėžti tik vieną statmenį. Panagrinėkime, kaip jį galėtume brėžti, jeigu prireiktų.



Iš taško M į plokštumą α reikia nubrėžti statmenį. Plokštumoje α nubrėžkime bet kokią tiesę l; per šią tiesę l ir tašką M išveskime plokštumą β. Plokštumoje β į tiesę l nubrėžkime statmenį MN. Dabar plokštumoje α per tašką N nubrėžkime tiesę n, statmeną tiesei l. Plokštumoje, kuri eina per MN ir tiesę n, iš taško M nuleiskime statmenį MB į tiesę n. MB ir yra statmuo, nuleistas iš taško M į plokštumą α.
Kad įsitikintume, jog MB yra tikrai statmena plokštumai α, pakanka nurodyti dvi šios plokštumos tieses, statmenas MB. Vieną tokių tiesių lengva pastebėti: $MB \perp BN$. Galima įrodyti (pabandykite!), kad $MB \perp l$. Taigi $MB \perp \alpha$.

Pratimai ir uždaviniai

14. Įrodykite, kad iš dviejų pasvirųjų, išvestų iš to paties taško į plokštumą, ilgesnė bus ta, kurios projekcija yra ilgesnė.

15. Taško M nuotolis nuo plokštumos α lygus 30 cm. Iš taško M į plokštumą α nubrėžta pasviroji, kurios ilgis 50 cm. Apskaičiuokite šios pasvirosios projekcijos ilgį.

16. Iš taško A į duotą plokštumą nubrėžtas statmuo ir pasviroji. Statmens ilgis lygus a. Raskite pasvirosios ilgį, jeigu ji su duotąja plokštuma sudaro kampą:
a) $45°$; b) $30°$; c) $60°$.

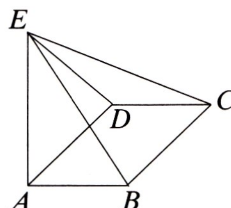
17. Piramidės $SABCD$ pagrindas yra kvadratas, kurio kraštinės ilgis 6 cm. Piramidės aukštinės ilgis 9 cm, o jos pagrindas yra kvadrato įstrižainių susikirtimo taškas O. Raskite taško S atstumą:
a) iki kvadrato viršūnių; b) iki kvadrato kraštinių.

18. Iš to paties taško į plokštumą nubrėžtos dvi pasvirosios: 8 cm ir 6 cm ilgio. Pirmosios pasvirosios projekcija į duotąją plokštumą ilgis 6,4 cm. Raskite antros pasvirosios projekcijos ilgį.

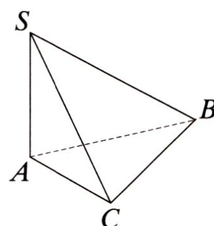
19. Iš taško A į plokštumą α nubrėžtas 2 dm ilgio statmuo AB ir 3 dm ilgio pasviroji AC. Raskite statmens projekcijos į pasvirąją ilgį.

20. Trikampės piramidės pagrindas yra lygiakraštis trikampis, kurio kraštinės ilgis 6 cm. Kiekviena piramidės šoninė briauna lygi 4 cm. Apskaičiuokite piramidės aukštinę.

21. Iš kvadrato $ABCD$ viršūnės A jo plokštumai iškeltas statmuo AE. Taškas E sujungtas su kvadrato viršūnėmis B, C, D. Įrodykite, kad trikampiai EBC ir EDC yra statieji.



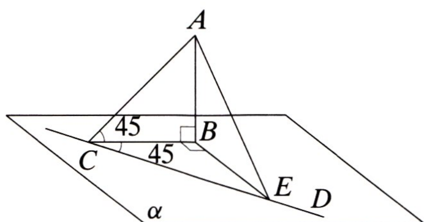
22. Duota: $SABC$ — piramidė, $SA = 13$ cm — piramidės aukštinė, $AB = BC = AC = 6$ cm.
Raskite viršūnės S nuotolį nuo kraštinės BC.



23. Prieštaros metodu įrodykite, kad dvi tiesės, statmenos tai pačiai plokštumai, yra lygiagrečios.

24. Atkarpa, kurios ilgis 8 cm, kerta plokštumą. Kokį kampą su plokštuma sudaro ši atkarpa, jei jos galai nutolę nuo tos plokštumos 2,5 dm ir 1,5 dm atstumu?

25. Pasviroji AC su plokštuma α sudaro $45°$ kampą. Plokštumoje α per pasvirosios pagrindą C nubrėžta tiesė CD, su pasvirosios projekcija CB sudaranti $45°$ kampą. Raskite kampo ACD didumą.

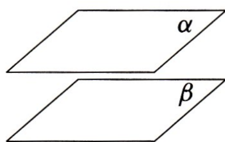


Patarimas. Pasinaudokite papildytu brėžiniu: $BE \perp BC$, taškas E yra tiesėje CD, taškai A ir E sujungti atkarpa.

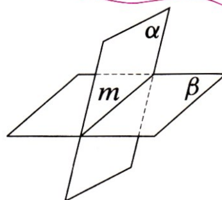
16.5. Dvi plokštumos erdvėje

Įsivaizduokime erdvėje dvi skirtingas plokštumas. Gali būti tik du atvejai

- abi plokštumos neturi bendrų taškų;
- abi plokštumos turi bendrą tiesę.



Plokštumos α ir β neturi bendrų taškų, $\alpha \parallel \beta$



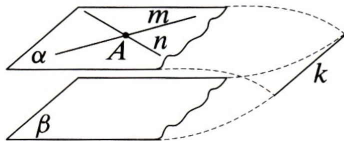
Plokštumos α ir β turi bendrą tiesę m, $\alpha \cap \beta = m$

APIBRĖŽIMAS
Dvi plokštumas, neturinčias bendrų taškų, vadiname lygiagrečiomis.
Jei α, β — lygiagrečios plokštumos, tai žymime $\alpha \parallel \beta$.

Įrodysime dviejų plokštumų lygiagretumo požymį.

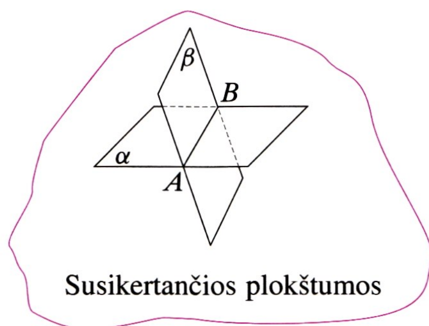
TEOREMA
Jeigu dvi susikertančios tiesės, esančios vienoje plokštumoje, yra lygiagrečios kitai plokštumai, tai tos plokštumos yra lygiagrečios.

Duota: m ir n yra plokštumoje α, $m \cap n = A$, $m \parallel \beta$, $n \parallel \beta$.
Įrodyti: $\alpha \parallel \beta$.



Įrodymas. Tarkime priešingai — plokštumos α ir β susikerta tiese k. Tada pagal tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymio atvirkštinę teoremą $m \parallel k$ ir $n \parallel k$. Gavome prieštaravimą: per tašką A eina dvi tiesės, lygiagrečios tiesei k. Vadinasi, prielaida, kad plokštumos lygiagrečios, neteisinga, taigi $\alpha \parallel \beta$.

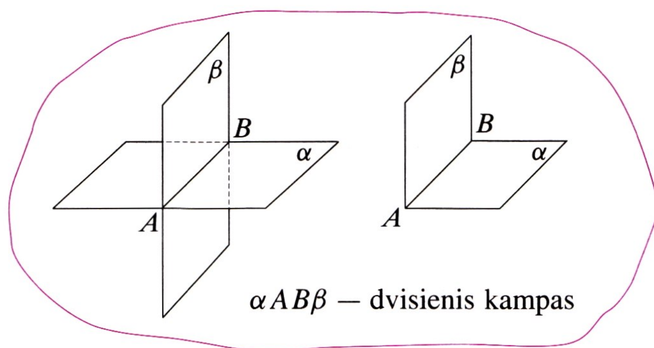
Dabar panagrinėkime susikertančias plokštumas, t. y. plokštumas, turinčias bendrą tiesę.



Susikertančios plokštumos

Prisiminkime, kad bet kuri plokštumos tiesė dalija plokštumą į dvi pusplokštumes. Dvi susikertančios plokštumos turi bendrą tiesę, kuri dalija kiekvieną plokštumą į dvi pusplokštumes. Šią bendrąją tiesę vadinsime kiekvienos iš pusplokštumių kraštu.

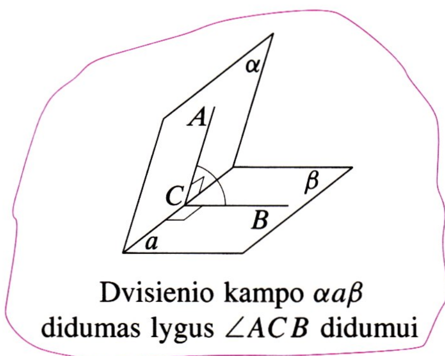
APIBRĖŽIMAS
Figūra, kurią sudaro dvi pusplokštumės, turinčios bendrą kraštą ir nesančios vienoje plokštumoje, vadinama dvisieniu kampu.
Bendrąjį pusplokštumių kraštą vadiname dvisienio kampo briauna, o pačias pusplokštumes — sienomis.



$\alpha AB\beta$ — dvisienis kampas

Dvisienius kampus žymėsime nurodydami pusplokštumių ir jų bendrojo krašto žymenis. Pavyzdžiui, norėdami pažymėti dvisienį kampą, kurį sudaro pusplokštumės α, β, turinčios bendrą kraštą — tiesę a — rašysime $\alpha a\beta$ ir t. t. Taigi dvi susikertančios plokštumos sudaro keturis dvisienius kampus.
Išmoksime matuoti šių dvisienių kampų didumus. Pasirinkime dvisienio kampo $\alpha a\beta$ briaunos tašką C ir per jį pusplokštumėse α ir β nubrėžkime pustieses, statmenas a. Jos sudaro kampą (brėžinyje — $\angle ACB$), kurį vadiname *tiesiniu* dvisienio kampo kampu. Galima įrodyti, kad tiesinio kampo didumas nepriklauso nuo to, kokį tašką C pasirenkame.

Jeigu tiesinis kampas yra status, tai ir atitinkamą dvisienį kampą vadinsime stačiuoju.



Dvisienio kampo $\alpha a \beta$ didumas lygus $\angle ACB$ didumui

APIBRĖŽIMAS
Dvisienio kampo didumu vadinsime jį atitinkančio tiesinio kampo didumą.

Susikertančios plokštumos sudaro keturis dvisienius kampus, šie kampai sudaro dvi vienodo didumo kampų poras.

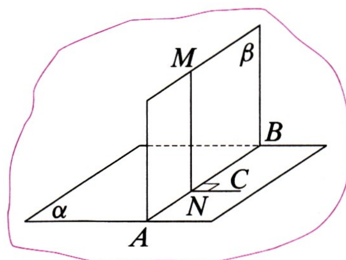
Paprastai sakoma, kad dvi susikertančios plokštumos kertasi kampu, kurio didumas lygus mažesniajam iš plokštumų sudaromų kampų didumui.

Svarbus yra susikertančių plokštumų atvejis, kai visų dvisienių kampų didumai lygūs 90°.

APIBRĖŽIMAS
Jei dvi plokštumos susikirsdamos sudaro stačiuosius dvisienius kampus, tai jos vadinamos viena kitai statmenomis.

TEOREMA (Dviejų plokštumų statmenumo požymis)
Jei plokštuma eina per tiesę, statmeną kitai plokštumai, tai plokštumos yra viena kitai statmenos.

Duota: $\alpha \cap \beta = AB$,
$MN \perp \alpha$, MN yra plokštumoje β.
Įrodyti: $\alpha \perp \beta$.
Įrodymas. Plokštumoje α brėžiame $NC \perp AB$. Tuomet kampas MNC bus dvisienio kampo $\alpha AB\beta$ tiesinis kampas. Kadangi $MN \perp \alpha$, tai $MN \perp NC$. Tiesinis kampas MNC yra status. Todėl ir jį atitinkantis dvisienis kampas $\alpha AB\beta$ yra status. Įrodėme, kad $\alpha \perp \beta$.



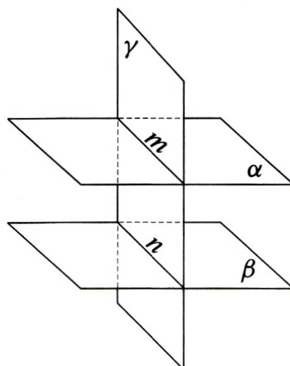
Pratimai ir uždaviniai

26. Kokia gali būti tiesių m ir n, esančių dviejose lygiagrečiose plokštumose, tarpusavio padėtis?

27. Įrodykite teoremą: „Jei dvi susikertančios tiesės, esančios vienoje plokštumoje, yra atitinkamai lygiagrečios su dviem susikertančiomis tiesėmis, esančiomis kitoje plokštumoje, tai tos plokštumos yra lygiagrečios“.

28. Įrodykite, kad lygiagrečių tiesių, kertančių lygiagrečias plokštumas, atkarpos tarp šių plokštumų yra lygios.

Patarimas. Pasinaudokite teorema: „Jei dvi lygiagrečias plokštumas α ir β kerta trečioji plokštuma γ, tai jų susikirtimo linijos m ir n yra lygiagrečios“.



Įrodymas. Įrodysime, kad tiesės m ir n yra vienoje plokštumoje ir neturi bendrų taškų.

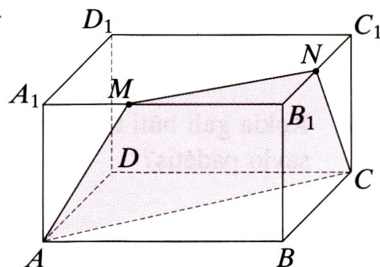
Iš tiesų, tiesės m ir n yra plokštumoje γ. Jei tartume, kad jos susikerta, tai turėtų susikirsti plokštumos α ir β. O tai prieštarauja sąlygai. Vadinasi, $m \parallel n$.

---

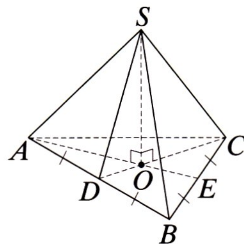
29. Įrodykite, kad jeigu dvi lygiagrečios tiesės kerta trečiąją tiesę ir jai lygiagrečią plokštumą, tai atkarpos, esančios tarp plokštumos ir jai lygiagrečios tiesės, yra lygios.

30. Duotos dvi prasilenkiančios tiesės. Kaip per jas nubrėžti dvi lygiagrečias plokštumas?

31. Nubraižytas gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pjūvis, gautas kertant jį plokštuma, einančia per viršūnes A, C ir briaunos A_1B_1 tašką M. Įrodykite, kad pjūvis $AMNC$ yra trapecija.



32. Brėžinyje pavaizduota taisyklingoji trikampė piramidė (jos pagrindas yra lygiakraštis trikampis, o aukštinė eina per pagrindo centrą).



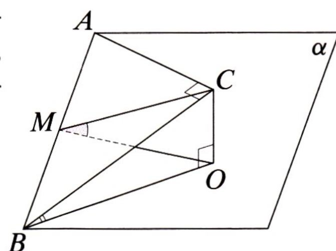
a) Įrodykite, kad kampas SDC yra dvisienio kampo, kurį sudaro šoninė siena ABS su pagrindu ABC, tiesinis kampas.

b) Nubrėžkite dvisienio kampo, kurį sudaro šoninė siena BCS su pagrindu ABC, tiesinį kampą.

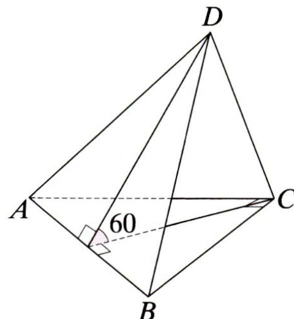
c) Nubrėžkite dvisienio kampo, kurį sudaro šoninė siena ACS su pagrindu ABC, tiesinį kampą.

33. Dvi plokštumos statmenos viena kitai. Taško A atstumas nuo vienos plokštumos lygus 7,5 cm, o nuo plokštumų susikirtimo linijos — 12,5 cm. Raskite atstumą nuo to taško iki kitos plokštumos.

34. Stačiojo lygiašonio trikampio ABC statinis yra pasviręs į plokštumą α, einančią per įžambinę AB, 30° kampu. Apskaičiuokite kampą tarp plokštumos α ir trikampio plokštumos.

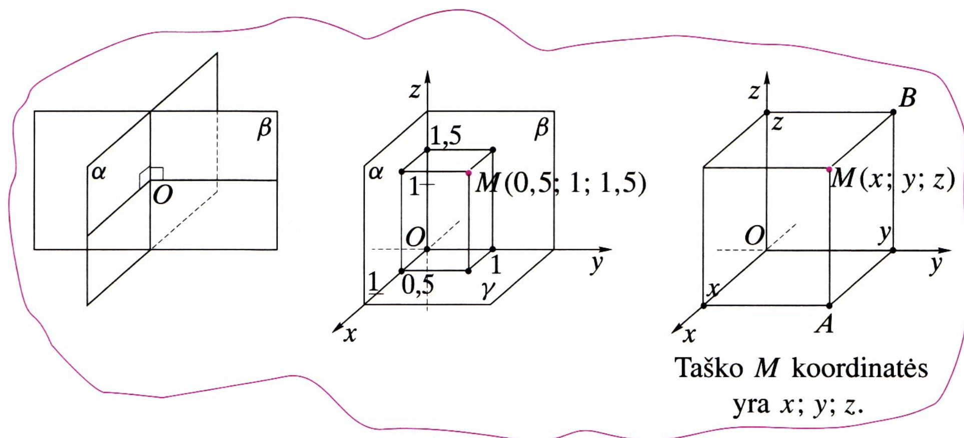


35. Du lygiašoniai trikampiai ADB ir ACB turi bendrą pagrindą AB, o jų plokštumos sudaro 60° kampą. Bendro pagrindo ilgis 32 cm. Trikampio ADB šoninės kraštinės ilgis 34 cm, o trikampio ACB šoninės kraštinės viena kitai statmenos. Raskite atstumą DC tarp trikampių viršūnių.



16.6. Erdvės koordinačių sistema

Nagrinėkime erdvėje dvi statmenas plokštumas α ir β (patogu įsivaizduoti, kad jų bendra tiesė eina vertikaliai). Jos sudaro keturis dvisienius kampus; galime sakyti, kad jos padalija erdvę į keturias dalis. Pasirinkime ant bendros abiem plokštumoms tiesės tašką O ir nubrėžkime vieno iš dvisienių kampų tiesinį kampą. Per šio kampo kraštines išveskime trečiąją plokštumą γ. Pagal plokštumų statmenumo požymį gauname, kad plokštuma γ statmena ir plokštumai α ir β. Kiekviena plokštumų pora turi po bendrą tiesę, nurodykime šių tiesių kryptis ir paverskime skaičių tiesėmis, susitarę, kad taškas O atitinka nulį ant kiekvienos tiesės ir kiekvienoje tiesėje naudojamas tas pats ilgio vienetas.
Susitarkime tris plokštumas žymėti taip: Oxy, Oyz ir Oxz.



Taško M koordinatės yra x; y; z.

Dabar kiekvieną erdvės tašką galime nusakyti trimis skaičiais — koordinatėmis. Norėdami rasti taško M koordinates, nubrėžkime per šį tašką tris plokštumas: vieną — statmeną Ox ašiai, kitą — Oy ašiai, trečią — Oz ašiai. Tiesių Ox, Oy ir Oz ir atitinkamų plokštumų susikirtimo taškus atitinkantys skaičiai ir yra taško M koordinatės. Jas žymime taip: $M(x; y; z)$, čia x — tašką ant Ox ašies atitinkantis skaičius (abscisė), y — Oy ašies skaičius (ordinatė), z — Oz ašies skaičius (aplikatė).
Sakoma, kad erdvėje yra įvesta Dekarto (arba — stačiakampė) koordinačių sistema.

Pratimai ir uždaviniai

36. Pažymėkite taškus, kurių koordinatės yra: $A(1; 0; 2)$, $B(2; -1; 3)$, $C(0; 0; -2)$, $D(-1; -1; -1)$, $E(4; 1; 0)$, $F(2; 0; 0)$. Kurie iš šių taškų yra:
a) koordinačių ašyse; b) koordinačių plokštumose?

37. Kubo $OBCDO_1B_1C_1D_1$ keturių viršūnių koordinatės yra: $O(0; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$, $D(1; 0; 0)$ ir $O_1(0; 1; 0)$. Raskite kitų kubo viršūnių koordinates.

38. Apskaičiuokite koordinačių ašies Oy taško M, vienodai nutolusio nuo taškų $A(2; -1; 1)$ ir $B(0; 1; 3)$, koordinates.

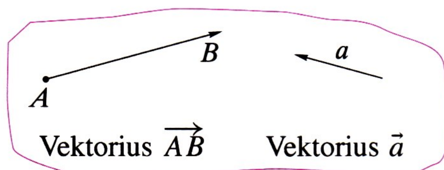
17. Erdvės vektoriai

17.1. Erdvės vektoriai ir jų veiksmai

Erdvėje, kaip ir plokštumoje, galime nagrinėti kryptines atkarpas. Jas vadinsime erdvės vektoriais (arba tiesiog vektoriais).

APIBRĖŽIMAS
Erdvės atkarpą, kurioje nurodyta kryptis, vadiname vektoriumi.

Erdvės vektorius žymėsime taip pat, kaip ir plokštumos vektorius. Pagrindinės vektorių teorijos sąvokos apibrėžiamos taip pat, kaip ir plokštumos vektorių. Jeigu atkarpoje AB nurodyta kryptis iš A į B, tai turime vektorių $\overrightarrow{AB}$. Vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ ilgiu (žymima $|\overrightarrow{AB}|$) vadiname atkarpos AB ilgį. Dažnai vektoriai žymimi ir viena mažąja raide, pavyzdžiui, $\vec{a}$. Tada jo ilgis žymimas $|\vec{a}|$.



Kiekvieną erdvės tašką galima laikyti vektoriumi, kurio pradžia sutampa su pabaiga. Toks vektorius vadinamas nuliniu. Nulinis vektorius žymimas $\vec{0}$ arba dviem vienodomis raidėmis, pavyzdžiui, $\overrightarrow{AA}$. Laikoma, kad nulinio vektoriaus ilgis lygus nuliui:

$$|\vec{0}| = 0.$$

Nuliniai vektoriai neturi krypties. Visus nulinius vektorius laikome lygiais.

APIBRĖŽIMAS
Vektoriai, esantys vienoje tiesėje arba lygiagrečiose tiesėse, vadinami kolineariaisiais.

Kolinearieji vektoriai gali būti nukreipti į vieną pusę (*vienakrypčiai*) arba į priešingas puses (*priešpriešiai*).

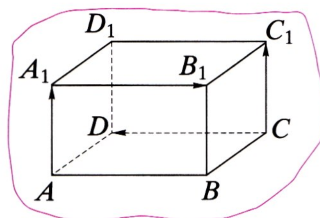
Panagrinėkime vektorius, atidėtus stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunose.

Vektoriai $\overrightarrow{AA_1}$ ir $\overrightarrow{CC_1}$ yra vienakrypčiai.

Rašome $\overrightarrow{AA_1} \uparrow\uparrow CC_1$.

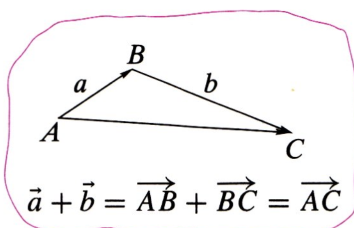
Vektoriai $\overrightarrow{A_1B_1}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra priešpriešiai.

Rašome $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

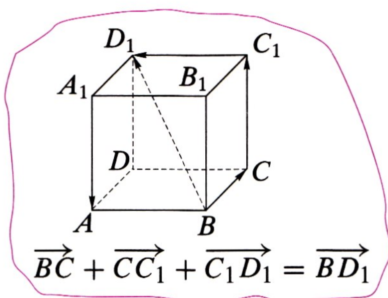


APIBRĖŽIMAS
Vienakrypčiai vektoriai, kurių ilgiai lygūs, vadinami lygiais.

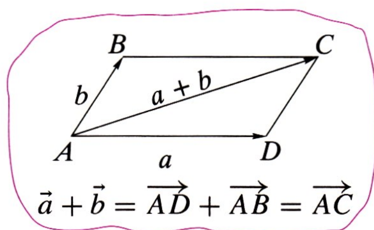
Stačiakampio gretasienio briaunose pažymėti vektoriai $\overrightarrow{AA_1}$ ir $\overrightarrow{CC_1}$ yra lygūs. Rašoma $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$. Vektoriai $\overrightarrow{A_1B_1}$ ir $\overrightarrow{CD}$ nėra lygūs: $\overrightarrow{A_1B_1} \neq \overrightarrow{CD}$.
Įsivaizduokime erdvės vektorių $\vec{a}$ ir kokį nors erdvės tašką A. Galima nubrėžti vienintelį vektorių, lygų vektoriui $\vec{a}$, kurio pradžios taškas būtų A. Dažnai sakoma, kad tai tas pats vektorius $\vec{a}$, atidėtas iš taško A.
Su erdvės vektoriais galima atlikti tuos pačius veiksmus, kaip ir su plokštumos vektoriais. Veiksmų apibrėžimai ir savybės taip pat yra tos pačios. Pakartokime juos.
Jei vektoriaus $\vec{a}$ galo taškas sutampa su vektoriaus $\vec{b}$ pradžios tašku, juos galima sudėti pagal trikampio taisyklę.



Panašiai galime sudėti ir daugiau vektorių. Jei reikia, pavyzdžiui, sudėti vektorius $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, tai vektorių $\vec{b}$ atidedame taip, kad jo pradžios taškas sutaptų su $\vec{a}$ galo tašku, o vektorių $\vec{c}$ — kad jo pradžios taškas sutaptų su $\vec{b}$ galo tašku. Tada vektorių $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ suma bus lygi vektoriui, kurio pradžios taškas sutampa su $\vec{a}$ pradžios tašku, o galo taškas — su $\vec{c}$ galo tašku.



Kai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra atidėti iš vieno taško, juos galima sudėti pagal lygiagretainio taisyklę.



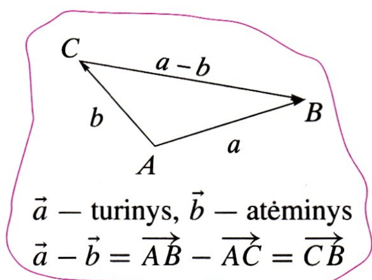
APIBRĖŽIMAS
Du vektoriai, kurių ilgiai lygūs, o kryptys priešingos, vadinami priešingaisiais vektoriais.

Pavyzdžiui, vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{BA}$ yra priešingieji vektoriai. Stačiakampio gretasienio briaunose pažymėti vektoriai $\overrightarrow{A_1A}$ ir $\overrightarrow{CC_1}$ taip pat yra priešingieji. Vektoriui $\vec{a}$ priešingas vektorius žymimas $-\vec{a}$.

Dviejų priešingų vektorių suma yra lygi nuliniam vektoriui.

Iš vieno erdvės vektoriaus galime atimti kitą. Vektorių atimtis yra priešingas veiksmas vektorių sudėčiai. Norint iš vektoriaus $\vec{a}$ atimti vektorių $\vec{b}$, galima prie $\vec{a}$ pridėti $-\vec{b}$, t. y. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

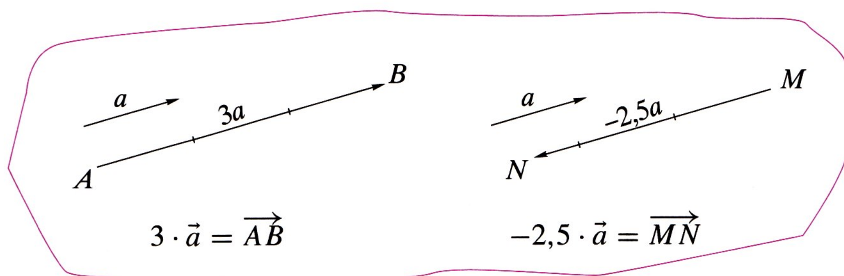
Dar papraščiau atimti vektorius, atidėtus iš vieno taško. Tada pakanka tų vektorių galus sujungti atkarpa ir pažymėti toje atkarpoje kryptį turinio link.



Nenulinio vektoriaus $\vec{a}$ ir skaičiaus m ($m \neq 0$) sandauga vadiname vektorių, kurio ilgis lygus $|m| \cdot |\vec{a}|$, o kryptis sutampa su vektoriaus $\vec{a}$ kryptimi, kai $m > 0$, ir priešinga vektoriaus $\vec{a}$ krypčiai, kai $m < 0$.

Nulinio vektoriaus ir bet kurio skaičiaus sandauga yra nulinis vektorius. Nulio ir bet kokio vektoriaus sandauga taip pat yra nulinis vektorius.

Skaičiaus m ir vektoriaus $\vec{a}$ sandauga žymima $m\vec{a}$.



Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) yra kolinearūs tik tada, kai yra toks skaičius m, kad $\vec{a} = m\vec{b}$. Erdvės vektorių veiksmai turi tas pačias plokštumos vektorių savybes:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ — sudėties perstatymo dėsnis;
$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ — sudėties jungimo dėsnis;
$(mn)\vec{a} = m(n\vec{a})$ — daugybos jungimo dėsnis;

$$\left.\begin{aligned}(m+n)\vec{a} &= m\vec{a} + n\vec{a}\\ m(\vec{a} + \vec{b}) &= m\vec{a} + m\vec{b}\end{aligned}\right\} \text{ — daugybos skirstymo dėsniai.}$$

Pratimai ir uždaviniai

39. Trikampis ABC lygiašonis ($AB = BC$), $BE \perp AC$, MN — trikampio vidurinė linija. Raskite vektorius:

a) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CE}$;

b) $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{EB}$;

c) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CE} - (\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{EN})$.

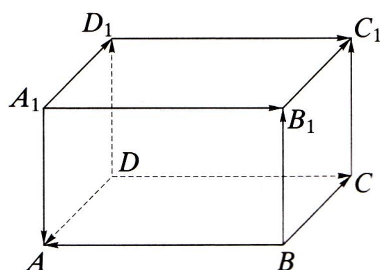
40. E ir F yra stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunų DD_1 ir BB_1 vidurio taškai. Raskite vektorius:

a) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CC_1}$;

b) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{ED}$;

c) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{C_1E} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{C_1F}$.

41. Kiekvienoje stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunoje pavaizduotas vektorius. Užrašykite:
a) vienakrypčių vektorių poras;
b) priešpriešių vektorių poras;
c) lygių vektorių poras.

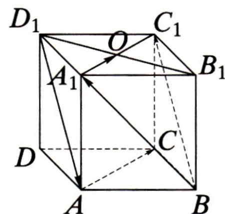


42. Suprastinkite reiškinius:

a) $\vec{m} = -1{,}5(2\vec{a} - 4\vec{b}) - (-3\vec{a} + 5\vec{b}) + 0{,}5(-6\vec{b} - 8\vec{a})$;

b) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - \frac{3}{4}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) - 1\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$.

43. Kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunose pažymėti vektoriai: $\overrightarrow{D_1A}$, $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{A_1O}$. Surašykite kolinearių vektorių poras.



44. Vektoriai $2\vec{a} + \vec{b}$ ir $\vec{a} - 2\vec{b}$ $(a - 2\vec{b} \neq \vec{0})$ yra kolinearūs. Įrodykite, kad vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ irgi kolinearūs.

45. Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Įrodykite, kad

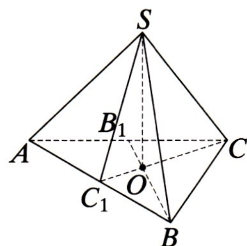
$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$.

46. Duota taisyklingoji trikampė piramidė $SABC$, SO — jos aukštinė. Raskite:

a) $\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$;

b) $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AB}$;

c) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{OC}$.



47. Įrodykite, kad keturkampio $ABCD$ kraštinių vidurio taškai K, L, M, N yra lygiagretainio viršūnės.

48. Duotas tetraedras $SABC$, M ir N — jo briaunų AS ir BC vidurio taškai. Vektorių $\overrightarrow{MN}$ išreikškite tetraedro briaunose esančiais vektoriais $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$.

Priminimas. Tetraedru vadiname trikampę piramidę, kurios visos briaunos yra lygios.

---

49. Duota trapecija $ABCD$, kurios pagrindas AB du kartus ilgesnis už pagrindą DC, ir erdvės taškas O (O gali nebūti trapecijos $ABCD$ plokštumoje, bet gali ir būti joje). Atkarpos AB vidurio taškas yra M. Išreikškite vektoriais $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ir $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ šiuos vektorius:

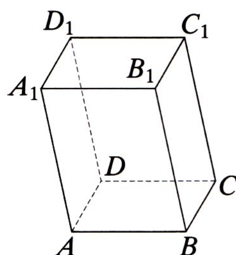
a) $\overrightarrow{DC}$; b) $\overrightarrow{OD}$; c) $\overrightarrow{OM}$.

50. Duotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Raskite tokį vektorių $\vec{x}$, kad jo pradžia ir pabaiga būtų gretasienio viršūnės ir kad būtų teisingos lygybės:

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA} + \vec{x} = \overrightarrow{AC_1}$;

b) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{D_1D} = \vec{x}$;

c) $\vec{x} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1C}$.



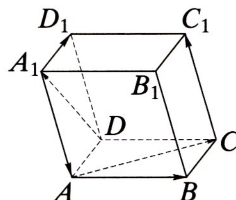
51. Duota taisyklingoji trikampė piramidė $SABC$, SO — jos aukštinė. Įrodykite, kad
$\overrightarrow{SO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$.

52. Tetraedro $SABC$ briaunose pažymėti vektoriai. Suprastinkite reiškinį

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) + \frac{1}{6}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}).$$

Pažymėkite tetraedre vektorių, lygų šio reiškinio reikšmei.

53. Gretasienyje $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pažymėti vektoriai $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CC_1}$.
Surašykite trejetus vektorių, kurie patys yra vienoje plokštumoje arba kuriems lygius vektorius galima atidėti vienoje plokštumoje.



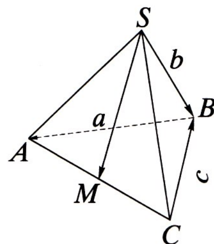
54. Duotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ar galima atidėti tris vektorius, lygius atitinkamiems duotojo trejeto vektoriams taip, kad atidėtieji vektoriai būtų vienoje plokštumoje, jei duotas vektorių trejetas yra:

a) $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{B_1D_1}$ ir $\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{D_1C_1}$ ir $\overrightarrow{BB_1}$; c) $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB_1}$ ir $\overrightarrow{A_1B_1}$?

55. Gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sienos BCC_1B_1 įstrižainės BC_1 ir CB_1 susikerta taške O. Išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$ vektorių:

a) $\overrightarrow{AO}$; b) $\overrightarrow{OD_1}$; c) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{D_1O}$.

56. Taškas M yra tetraedro $SABC$ briaunos AC vidurio taškas. Vektorių $\overrightarrow{SM}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{c}$.



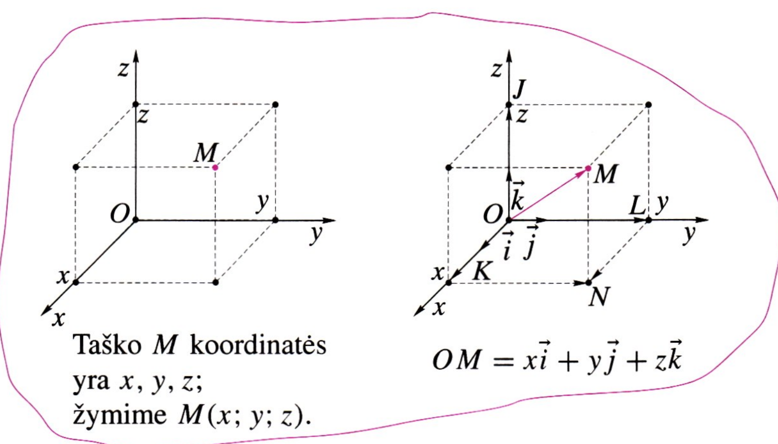
57. AO yra tetraedro $ABCD$ aukštinė. Išreikškite vektorių $\overrightarrow{AO}$ vektoriais $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$.

17.2. Erdvės vektorių koordinatės

Erdvėje įveskime stačiakampę koordinačių sistemą: per pasirinktą erdvės tašką O nubrėžkime tris tarpusavyje statmenas plokštumas, pažymėkime jų susikirtimo tieses, nurodykime jų kryptis ir pasirinkę ilgio matavimo vienetą paverskime šias tieses skaičių tiesėmis. Dabar kiekvienam erdvės taškui M galime nurodyti tris skaičius — jo koordinates.

Vektorių, kurio pradžios taškas yra O, o galo taškas — erdvės taškas M, vadinsime taško M vietos vektoriumi. Taigi taško M vietos vektorius yra vektorius $\overrightarrow{OM}$. Koordinačių ašyse Ox, Oy, Oz iš taško O atidėkime po vienetinį vektorių taip, kad jų kryptys sutaptų su koordinačių ašių kryptimis. Šiuos vektorius žymėsime $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Pažymėkime kokį nors erdvės tašką $M(x; y; z)$ ir nagrinėkime jo vietos vektorių $\overrightarrow{OM}$.



Iš brėžinio matome $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{NM}$. Tačiau $\overrightarrow{OK} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{OL} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OJ} = z\vec{k}$, todėl

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Taigi kiekvieną vietos vektorių galima išreikšti vienetiniais koordinačių ašių vektoriais $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Skaičius x, y, z vadinsime vektoriaus $\overrightarrow{OM}$ koordinatėmis ir žymėsime $\overrightarrow{OM}(x; y; z)$.

Tarkime, erdvės vektoriaus $\vec{a}$ pradžios taškas nesutampa su koordinačių sistemos pradžios tašku O. Tada iš taško O atidėję vektoriui $\vec{a}$ lygų vektorių $\overrightarrow{OM}$, galėsime jį išreikšti vienetiniais vektoriais:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \text{taigi} \quad \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Taigi vienetiniais koordinačių ašių vektoriais galime išreikšti kiekvieną erdvės vektorių.

Kiekvieną erdvės vektorių $\vec{a}$ galima išreikšti (vieninteliu būdu) vienetiniais vektoriais $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Skaičiai x, y, z vadinami vektoriaus $\vec{a}$ koordinatėmis. Žymime $\vec{a}(x; y; z)$.

Žinome, kad sudedant plokštumos vektorius, koordinatės taip pat sudedamos; dauginant vektorių iš skaičiaus, koordinatės taip pat dauginamos iš šio skaičiaus. Tas pačias savybes turi ir erdvės vektorių koordinatės.

Jei vektoriaus $\vec{a}$ koordinatės yra $(x_1; y_1; z_1)$, o vektoriaus $\vec{b}$ koordinatės — $(x_2; y_2; z_2)$, tai vektorių $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $k \cdot \vec{a}$ ($k \in \boldsymbol{R}$) koordinatės yra

$$(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2),$$
$$(x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2),$$
$$(kx_1; ky_1; kz_1).$$

Įrodykime, pavyzdžiui, kad vektorių $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ ir $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ sumos koordinatės yra $(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$. Kadangi

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k},$$

tai

$$\vec{a}+\vec{b} = x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}+x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k} = (x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k},$$

taigi

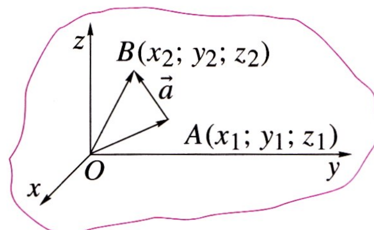
$$(\vec{a} + \vec{b})(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2).$$

1 užduotis. Įrodykite kitas dvi erdvės vektorių koordinačių savybes.

Tarkime, erdvės vektoriaus $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ pradžios ir galo taškų koordinatės yra $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$. Raskime vektoriaus $\vec{a}$ koordinates.

Nubrėžkime taškų A ir B vietos vektorius $\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{OB}$ ir išreikškime šiuos vektorius vienetiniais:

$$\overrightarrow{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},$$
$$\overrightarrow{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$



Kadangi $\vec{a} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, tai

$$\vec{a} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} - x_1\vec{i} - y_1\vec{j} - z_1\vec{k} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

Taigi

$$\vec{a}(x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1).$$

Jeigu vektoriaus $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ pradžios taško koordinatės yra $(x_1; y_1; z_1)$, o galo — $(x_2; y_2; z_2)$, tai vektoriaus $\vec{a}$ koordinatės yra $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Naudojantis vektorių koordinatėmis patogu tikrinti, ar vektoriai yra kolinearūs, t. y. ar jie yra lygiagrečiose tiesėse.

PAVYZDYS. Nustatykime, ar vektoriai $\vec{a}(1; 3; -4)$ ir $\vec{b}(2; 6; -8)$ yra kolinearūs.
Jeigu yra toks skaičius m, kad $\vec{a} = m\vec{b}$, tai vektoriai yra kolinearūs. Tarkime, toks skaičius yra.
Kadangi $\vec{a}$ koordinatės yra $(1; 3; -4)$, o $m\vec{b}$ koordinatės yra $(2m; 6m; -8m)$, tai skaičius m turi tenkinti lygybes

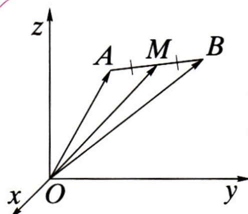
$$1 = 2m, \quad 3 = 6m, \quad -4 = -8m.$$

Matome, kad skaičius $m = \frac{1}{2}$ tenkina visas tris lygybes, taigi $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}$, t. y. vektoriai yra kolinearūs.

2 užduotis. Nustatykite, ar vektoriai $\vec{p}(6; 0; 15)$ ir $\vec{r}(-2; 0; 5)$ yra kolinearūs.

Vektoriai praverčia ieškant erdvės taškų koordinačių, skaičiuojant atkarpų ilgius, kampų didumus ir sprendžiant daugelį kitų geometrijos uždavinių.

TEOREMA
Kiekviena atkarpos vidurio taško koordinatė lygi jos galų atitinkamų koordinačių sumos pusei.



Duota: $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $AM = BM$, $M(x; y; z)$.
Įrodyti: $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, $z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$.

Įrodymas. Kadangi M yra atkarpos AB vidurio taškas, tai $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. Vietos vektorių $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OM}$ koordinatės yra: $\overrightarrow{OA}(x_1; y_1; z_1)$, $\overrightarrow{OB}(x_2; y_2; z_2)$, $\overrightarrow{OM}(x; y; z)$.

Remdamiesi lygybe $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, gauname:

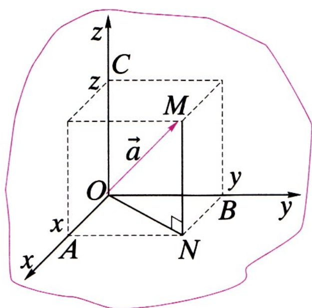
$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \qquad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \qquad z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Teorema įrodyta.

3 užduotis. Taškas M yra atkarpoje AB ir $AM : MB = \frac{1}{3}$. Apskaičiuokite taško M koordinates, jei taškų A ir B koordinatės yra $(x_1; y_1; z_1)$ ir $(x_2; y_2; z_2)$.

Žinodami vektoriaus $\vec{a}$ koordinates, galime rasti jo ilgį. Tarkime, vektoriaus $\vec{a}$ koordinatės yra $(x; y; z)$. Atidėkime vektorių $\vec{a}$ iš koordinačių pradžios taško: $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$. Iš taško M nubrėžkime statmenį į plokštumą Oxy. Kadangi $\triangle OMN$ yra statusis, tai

$$|\vec{a}|^2 = OM^2 = ON^2 + MN^2.$$



Tačiau $MN^2 = z^2$, o $ON^2 = x^2 + y^2$, taigi

$$|\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Vektoriaus ilgį išreiškėme jo koordinatėmis.

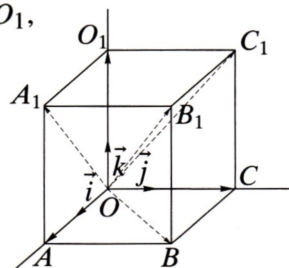
Jei žinomos vektoriaus $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ pradžios ir galo taškų koordinatės $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, tai $\vec{a}$ koordinatės yra $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.
Tada $|\vec{a}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$.

Jei vektoriaus $\vec{a}$ pradžios taško koordinatės yra $(x_1; y_1; z_1)$, o galo — $(x_2; y_2; z_2)$, tai vektoriaus ilgis

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Pratimai ir uždaviniai

58. Pavaizduotas stačiakampis gretasienis $ABCOA_1B_1C_1O_1$, $OA = 2{,}5$; $OC = 4$; $OO_1 = 3$.



a) Išreikškite vektorius $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$ vienetiniais vektoriais $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

b) Raskite vektorių $\overrightarrow{OO_1}$, $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OB}$ koordinates.

59. Duoti vektoriai $\vec{a}(-2; 3; 1)$, $\vec{b}(-4; 0; 5)$, $\vec{c}(0; -3; 0)$. Raskite šių vektorių koordinates:
a) $\vec{a} + \vec{b}$; b) $\vec{a} + \vec{c}$; c) $\vec{b} + \vec{c}$; d) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

60. Duoti vektoriai $\vec{m}(0; -4; 2)$, $\vec{n}(-1; 2{,}5; 0)$, $\vec{p}(5; -1{,}5; 4)$. Raskite šių vektorių koordinates:
a) $\vec{m} - \vec{n}$; b) $\vec{p} - \vec{n}$; c) $\vec{n} - \vec{m}$; d) $\vec{p} - \vec{m} - \vec{n}$.

61. Duoti vektoriai $\vec{f}(0{,}5; 1; -2)$, $\vec{g}(0; 0; -2{,}4)$, $\vec{h}(3; -3; 3)$. Raskite šių vektorių koordinates:
a) $\vec{a} = -2\vec{f} + 4\vec{g}$;
b) $\vec{b} = 3\vec{g} - \vec{f} + 2\vec{h}$;
c) $\vec{c} = -\vec{h} - 4\vec{f} - 0{,}5\vec{g}$.

62. Raskite vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ ilgį, kai:
a) $\overrightarrow{AB}(-4; -3; \sqrt{11})$;
b) $A(1; 2; \sqrt{5})$, $B(3; -2; 0)$;
c) $A(1; -1; 0)$, $B(-1; 1; -1)$.

63. Ar kolinearūs vektoriai:
a) $\vec{a}(7; -5; 2)$ ir $\vec{b}(-5{,}6; 4; -1{,}6)$;
b) $\vec{c}(-1{,}2; 3{,}6; 0)$ ir $\vec{d}(-4{,}8; 10{,}8; 0)$;
c) $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$, kai $A(-4; 6; 2)$, $B(2; 10; -4)$, $C(4; 5; -8)$, $D(1; 3; -5)$?

64. Raskite vektoriaus $\overrightarrow{AB}$, lygaus vektoriui $\vec{a}$, galo B koordinates, kai:
a) $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $A(-2; 0; 5)$;
b) $\vec{a}(0; -6; 8)$, $A(3; -1; 0)$;
c) $\vec{a}(4{,}5; 0; 0)$, $A(-1{,}5; \frac{2}{3}; \sqrt{2})$.

65. Raskite vektoriaus $\overrightarrow{MN}$, lygaus vektoriui $\vec{m}$, pradžios M koordinates, kai:
a) $\vec{m} = 5\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $N(0; 0; -1)$;
b) $\vec{m}\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{2}{5}\right)$, $N(-0{,}25; -0{,}6; 0{,}8)$;
c) $\vec{m}(-\sqrt{2}; \sqrt{3}; 2\sqrt{2})$, $N(3\sqrt{2}; -\sqrt{3}; 4\sqrt{2})$.

66. Ar taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje, kai:
a) $A(-2; 4; -1)$, $B(-3; -1; 7)$, $C(-4; -6; 15)$;
b) $A(3; 2; -1)$, $B(-4; 5; 0)$, $C(-1; 0; -2)$?

67. Duoti taškai $A(6; -2; 10)$, $B(4; 6; -8)$, $C(14; 0; -2)$. Raskite tokį tašką D, kad vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{DC}$ būtų lygūs.

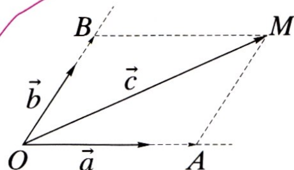
68. Raskite atkarpos AB vidurio taško M koordinates, kai:
a) $A(3; 4; 0)$, $B(-6; 2; 5)$;
b) $A(3{,}6; -2{,}8; -4)$, $B(-1{,}6; 3; -5{,}4)$.

69. Raskite atstumą nuo koordinačių pradžios taško O iki atkarpos AB vidurio taško M, kai $A(5; 0; -3)$ ir $B(-3; 4; -1)$.

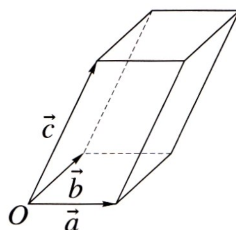
70. Duotos atkarpos AB galo A ir vidurio taško C koordinatės. Raskite taško B koordinates, kai:
a) $A(-6; 7; -3)$, $C(0; -4; -1)$;
b) $A(1{,}2; -0{,}4; -2{,}2)$, $C(2; -2; 0)$.

71. Raskite tokius skaičius m ir n, su kuriais vektoriai $\vec{a}(4; m; n)$ ir $\vec{b}(n; 1; m^2)$ būtų kolinearūs.

72. Jeigu atidėję tris nenulinius vektorius $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ iš vieno taško, gauname vektorius, esančius vienoje plokštumoje, tai vektorius $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ vadiname komplanariais. Jei nenuliniai vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ yra komplanarieji, tai bet kurį iš jų galima išreikšti kitais dviem.



$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — komplanarūs vektoriai
$\vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} = x\vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = y\vec{b}$
$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.



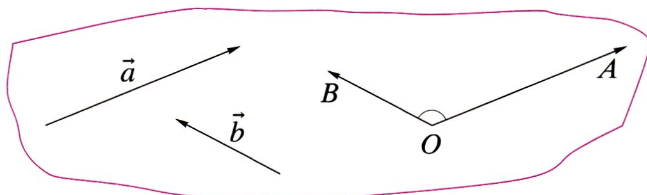
$\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$
nekomplanarūs vektoriai.

Ar komplanarūs vektoriai:
a) $\vec{a}(2; 0; -2)$, $\vec{b}(1; 1; 0)$ ir $\vec{c}(0; 1; 1)$;
b) $\vec{f}(-4; -1; -10)$, $\vec{g}(0; -12; 0)$ ir $\vec{h}(1; -2; 5)$?

17.3. Vektorių skaliarinė daugyba

Erdvės vektorių skaliarinė sandauga apibrėžiama taip pat, kaip plokštumos vektorių. Prisiminkime, kaip tai daroma.

Kad ir kokie būtų du nenuliniai erdvės vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, atidėję juos nuo vieno taško O, gauname vienoje plokštumoje esančius vektorius. Pažymėkime juos $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ir $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.



Kampu tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vadinamas kampas tarp spindulių OA ir OB. Kampą tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ žymėsime $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Kai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vienakrypčiai arba bent vienas jų nulinis, laikysime, kad kampas tarp tokių vektorių lygus $0°$. Didžiausias kampas $180°$ yra tarp priešpriešių vektorių. Jeigu $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90°$, tai vektorius vadinsime statmenais ir žymėsime $\vec{a} \perp \vec{b}$. Aišku, kad $0° \leqslant (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \leqslant 180°$.

APIBRĖŽIMAS
Dviejų nenulinių vektorių skaliarine sandauga vadinamas skaičius, lygus tų vektorių ilgių ir kampo tarp jų kosinuso sandaugai.

Jeigu bent vienas iš dviejų vektorių yra nulinis, tai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinė sandauga žymima $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Taigi pagal apibrėžimą

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

Sandaugą $\vec{a} \cdot \vec{a}$ žymėsime $\vec{a}^2$ ir vadinsime vektoriaus $\vec{a}$ skaliariniu kvadratu. Turime

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0° = |\vec{a}|^2.$$

Taigi vektoriaus skaliarinis kvadratas lygus jo ilgio kvadratui.

Iš lygybės $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ išplaukia, kad dviejų nenulinių vektorių skaliarinė sandauga lygi nuliui tik tada, kai $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$, t. y. kai $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90°$.

Dviejų nenulinių vektorių skaliarinė sandauga lygi nuliui tik tada, kai šie vektoriai yra statmeni.

Jeigu žinome nenulinių vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ ilgius bei jų skaliarinę sandaugą $\vec{a}\cdot\vec{b}$, tai galime rasti kampo tarp vektorių kosinusą:

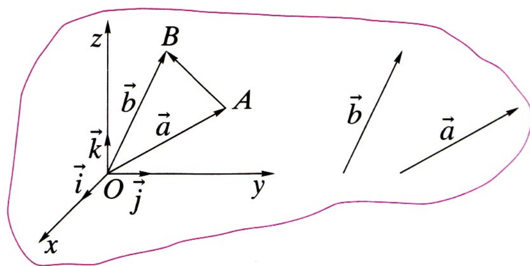
$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}. \tag{1}$$

Skaliarinės sandaugos reiškimas koordinatėmis

Plokštumos vektorių skaliarinę sandaugą galima išreikšti vektorių koordinatėmis. Įsitikinsime, kad koordinatėmis galima išreikšti ir erdvės vektorių skaliarinę sandaugą.

TEOREMA

Dviejų vektorių $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ ir $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ skaliarinė sandauga lygi tų vektorių atitinkamų koordinačių sandaugų sumai, t. y. $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.



Įrodymas. Nesunku įsitikinti, kad skaliarinės sandaugos skaičiavimo formulė yra teisinga, kai bent vienas iš vektorių yra nulinis arba vektoriai yra kolinearūs. Sakykime, kad vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nenuliniai ir nekolinearūs. Atidėję juos nuo koordinačių pradžios taško O, gauname: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Nubrėžiame vektorių $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.
Iš trikampio ABO pagal kosinusų teoremą:

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}),$$

arba

$$|b - a|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

Iš čia

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\big(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2\big). \tag{2}$$

Vektorių $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{b} - \vec{a}$ ilgių kvadratų reikšmės lygios:

$$|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad |\vec{b}| = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$
$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Šias reikšmes įrašę į (2) lygybę ir suprastinę reiškinį, gauname:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \qquad (3)$$

Teorema įrodyta.
Remiantis teorema apie skaliarinės sandaugos reiškimą koordinatėmis, nesunku patikrinti, jog erdvės vektorių skaliarinei daugybai teisingi tie patys plokštumos vektorių dėsniai:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ — perstatymo dėsnis;
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ — skirstymo dėsnis;
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ — jungimo dėsnis.

Kampo tarp erdvės vektorių skaičiavimas
Į formulę $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ įrašę $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $|\vec{a}|$ ir $|\vec{b}|$ koordinatines išraiškas, gauname kampo tarp nenulinių vektorių kosinuso formulę.

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (4)$$

1 PAVYZDYS. Apskaičiuokime kampą tarp vektorių $\vec{a}(2; -2; 1)$ ir $\vec{b}(-4; 1; 1)$.
Sprendimas. Į (4) formulę įrašome vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ koordinates:

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{2 \cdot (-4) + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{-9}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{18}} =$$

$$= -\frac{9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

taigi $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 135^\circ$.

2 PAVYZDYS. Nustatykime, su kuria n reikšme nenuliniai vektoriai $\vec{a}(n; 4; -3)$ ir $\vec{b}(-2; n; -1)$ yra statmeni.
Sprendimas. Nenuliniai vektoriai statmeni tik tada, kai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui. Kadangi $\vec{a} \cdot \vec{b} = n \cdot (-2) + 4 \cdot n + (-3) \cdot (-1)$, tai n reikšmę surasime spręsdami lygtį:

$$-2n + 4n + 3 = 0, \quad 2n = -3, \quad n = -1{,}5.$$

Pratimai ir uždaviniai

73. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ sudaro 60° kampą, $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$. Apskaičiuokite skaliarinę sandaugą $(2\vec{a} + \vec{b})(3\vec{a} - \vec{b})$.

74. Duoti vektoriai $\vec{m}(0; 1; 2)$, $\vec{n}(-3; -1; 2)$ ir $\vec{k}(5; 0; -4)$. Apskaičiuokite:
a) $\vec{m} \cdot \vec{n}$; b) $\vec{k} \cdot \vec{k}$; c) $(\vec{m} + \vec{n}) \cdot \vec{k}$.

75. Ar statmeni vektoriai:
a) $\vec{a}(-2; 3; 5)$ ir $\vec{b}\left(\frac{1}{2}; 2; -1\right)$;
b) $\vec{a} = -3\vec{i} - 2\vec{j}$ ir $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$;
c) $\vec{a}(0; 2; -3)$ ir $\overrightarrow{MN}$, kai $M(-1; 0; 2)$, $N(0; -2; 1)$?

76. Su kuria x reikšme vektoriai yra vienas kitam statmeni:
a) $\vec{a}(2; 0; 4)$ ir $\vec{b}(-4; 5; x)$;
b) $\vec{a}(x; -3; x)$ ir $\overrightarrow{AB}$, kai $A(5; 0; -4)$, $B(0; 8; -7)$?

77. Duota: $A(4; -2; 0)$, $B(1; 1; 3)$, $C(0; -2; -4)$. Kurie du iš trijų vektorių $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{AC}$ yra tarpusavyje statmeni?

78. Įrodykite, kad trikampis, kurio viršūnės $A(-3; 2; -1)$, $B(-3; -2; -3)$, $C(-3; 5; -7)$, yra statusis.

79. Kiekvienos tetraedro $ABCD$ briaunos ilgis lygus 10. M ir N — briaunų AD ir AC vidurio taškai. Apskaičiuokite skaliarines sandaugas:
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$; c) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CD}$; d) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$.

80. Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ir vektoriai $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$. Išreiškę vektorius $\overrightarrow{AC_1}$ ir $\overrightarrow{A_1D}$ vektoriais $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, įrodykite, kad $\overrightarrow{AC_1} \perp \overrightarrow{A_1D}$.

81. Raskite kampą tarp vektorių $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$ ir $\vec{b}\left(-2; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

82. Raskite kampą tarp vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$, kai:
$A(-1; -2; 5)$, $B(1; -4; 5)$, $C(2; -2; 2)$.

83. Raskite kosinusus kampų, kuriuos duotieji vektoriai sudaro su koordinačių ašimis:
a) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$;
b) $\overrightarrow{AB}$, kai $A(0; 1; 2)$, $B(1; 2; 3)$.

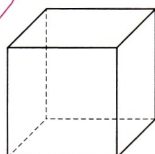
84. Duoti du vektoriai $\vec{a}(-2; 3; -5)$ ir $\vec{b}(1; 3; 1)$. Raskite vektoriaus $\vec{c}$, kolinearaus vektoriui $\vec{b}$, koordinates, kai $\vec{a} \cdot \vec{c} = 10$.

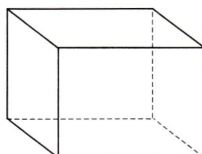
85. Vienetinis vektorius $\vec{m}$ yra statmenas vektoriams $\vec{a}(1; 0; 1)$ ir $\vec{b}(0; 1; 1)$. Apskaičiuokite vektoriaus $\vec{m}$ koordinates.

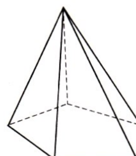
86. Duoti trys vektoriai $\vec{a}(-5; 1; 0)$, $\vec{b}(0; -4; 3)$, $\vec{c}(-1; -2; -3)$. Raskite vektoriaus $\vec{x}$ koordinates, kai $\vec{a} \cdot \vec{x} = -20$, $\vec{b} \cdot \vec{x} = -9$, $\vec{c} \cdot \vec{x} = 5$.

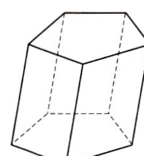
18. Briaunainiai

Geometrinis kūnas, apribotas plokščiaisiais daugiakampiais, vadinamas *briaunainiu*. Plokštieji daugiakampiai vadinami *briaunainio sienomis*, jų kraštinės — *briaunomis*, o viršūnės — briaunainio *viršūnėmis*. Atkarpos, jungiančios dvi viršūnes, esančias ne vienoje sienoje, vadinamos *briaunainio įstrižainėmis*.
Briaunainis vadinamas *iškiluoju*, jei jis yra vienoje pusėje nuo kiekvienos jo sienos plokštumos. Pavyzdžiui, kubas, stačiakampis gretasienis, piramidė, prizmė yra iškilieji briaunainiai.


Kubas

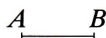

Stačiakampis gretasienis


Piramidė

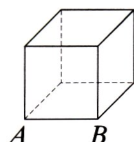

Prizmė

Dažnai tenka skaičiuoti briaunainių paviršiaus plotus bei tūrius. Briaunainio paviršiaus plotas — tai tiesiog briaunainio sienų plotų suma.
Tūris, panašiai kaip plokščiųjų figūrų plotas, nusako erdvės kūno „didumą“.
Tūrio sąvokos savybės panašios į ploto savybes:

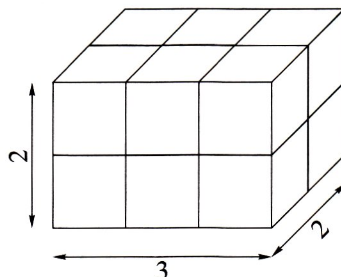
- kūno tūris yra teigiamas skaičius;
- lygių kūnų tūriai yra lygūs;
- jei kūnas padalytas į kelias dalis, tai jo tūris lygus tų dalių tūrių sumai;
- kubo, kurio briaunų ilgiai lygūs 1, tūris lygus 1.



$AB = 1$ (ilgio vienetas)



$V = 1$ (tūrio vienetas)



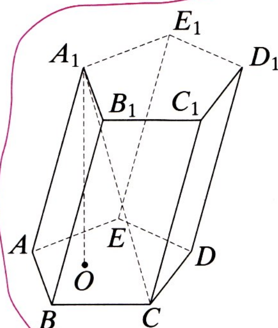
$V = 3 \times 2 \times 2$ (tūrio vienetai)

Jeigu briaunainį galima padalyti į kubelius, kurių briaunos ilgis lygus 1, tai tūris lygus gautųjų kubelių skaičiui. Tačiau dažniausiai tūrius skaičiuojame naudodamiesi formulėmis.

18.1. Prizmės

Briaunainis, kurio dvi sienos yra lygiagrečiose plokštumose esantys lygūs daugiakampiai su atitinkamai lygiagrečiomis kraštinėmis, o kitos sienos — lygiagretainiai, vadinamas *prizme*.

Lygiagrečiose plokštumose esančios sienos vadinamos briaunainio pagrindais, o kitos sienos — šoninėmis sienomis.



$ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ — prizmė;
penkiakampiai $ABCDE$ ir $A_1B_1C_1D_1E_1$ — prizmės pagrindai;
lygiagretainiai ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, DEE_1D_1 ir EAA_1E_1 — prizmės šoninės sienos;
atkarpos AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1 — prizmės šoninės briaunos;
atkarpa A_1C — prizmės įstrižainė;
$A_1O \perp (ABC)$ — prizmės aukštinė.

Jei prizmės pagrindai yra trikampiai, tai prizmė vadinama *trikampe*, jei keturkampiai — *keturkampe* ir t. t.

Prizmė vadinama *pasvirąja*, jeigu jos šoninės briaunos nėra statmenos pagrindams. Brėžinyje pavaizduota pasviroji penkiakampė prizmė.

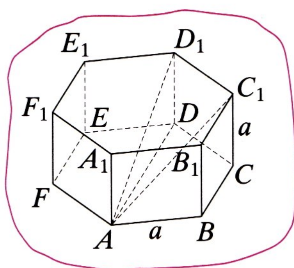
Prizmė vadinama *stačiąja*, jeigu jos šoninės briaunos yra statmenos pagrindams.

Prizmė vadinama *taisyklingąja*, jeigu ji yra stačioji ir jos pagrindai — taisyklingieji daugiakampiai.

Prizmės aukštine vadinama tiesės, statmenos pagrindų plokštumoms, atkarpa tarp tų plokštumų. Brėžinyje pavaizduota prizmės aukštinė A_1O. Stačiosios prizmės aukštine galima laikyti jos šoninę briauną.

Jei atkarpa jungia dvi prizmės viršūnes, esančias ne vienoje sienoje, tai ji yra *prizmės įstrižainė*. Brėžinyje pavaizduota prizmės įstrižainė A_1C.

PAVYZDYS. Prizmės pagrindas yra taisyklingasis šešiakampis, kurio kraštinė a. Prizmės šoninės sienos — kvadratai. Apskaičiuokime prizmės didesniąją įstrižainę AD_1.



Sprendimas. Kadangi

$$A_1A \perp AB \quad \text{ir} \quad A_1A \perp AF, \quad \text{tai} \quad A_1A \perp (ABC).$$

Prizmė taisyklingoji, nes pagrindai taisyklingieji šešiakampiai, o šoninės briaunos statmenos pagrindams.
Pasinaudoję taisyklingojo šešiakampio savybėmis, gauname $AD = 2a$. Iš stačiojo trikampio ADD_1 pagal Pitagoro teoremą:

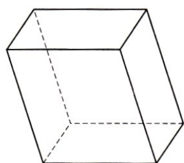
$$AD_1 = \sqrt{AD^2 + DD_1^2};$$

$$AD_1 = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}.$$

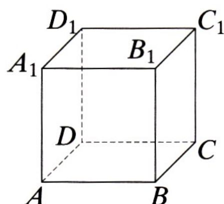
1 užduotis. Apskaičiuokite prizmės mažesniąją įstrižainę AC_1.

Gretasieniai

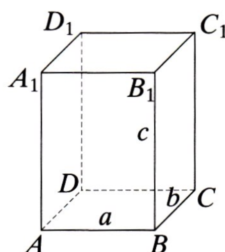
Prizmė, kurios pagrindai yra lygiagretainiai, vadinama *gretasieniu*. Gretasienio visos šešios sienos yra lygiagretainiai, todėl jo pagrindais galima laikyti bet kurią priešingų sienų porą.
Jeigu šoninės gretasienio sienos yra statmenos pagrindams, gretasienis yra statusis, jeigu nėra statmenos — pasvirasis.
Statusis gretasienis, kurio pagrindas stačiakampis, vadinamas *stačiakampiu gretasieniu*. Jo visos sienos yra stačiakampiai. Stačiakampio gretasienio trijų briaunų, išeinančių iš vienos viršūnės, ilgiai vadinami *matmenimis*.
Stačiakampis gretasienis, kurio visi trys matmenys yra lygūs, vadinamas *kubu*.



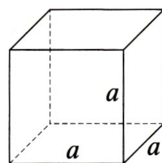
Pasvirasis gretasienis



Statusis gretasienis ($ABCD$ — lygiagretainis)



Stačiakampis gretasienis ($ABCD$ — stačiakampis) a, b, c — stačiakampio gretasienio matmenys



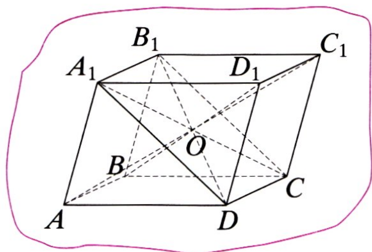
Kubas

Gretasienių savybės

TEOREMA

Visos keturios gretasienio įstrižainės susikerta viename taške ir dalijasi jame pusiau.

Įrodymas. Tegul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ gretasienis, o AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 — jo įstrižainės.

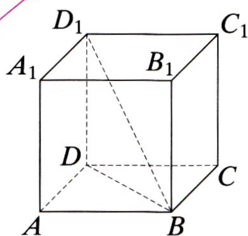


Nubrėžkime DA_1 ir CB_1. Keturkampis CDA_1B_1 yra lygiagretainis, nes CD lygi ir lygiagreti A_1B_1. Jo įstrižainės CA_1 ir DB_1 (kartu ir gretasienio įstrižainės) susikerta taške O ir dalijasi jame pusiau.

Nubrėžę AB_1 ir DC_1, gautume lygiagretainį ADC_1B_1 (paaiškinkite, kodėl), kurio įstrižainės DB_1 ir AC_1 taip pat susikirsdamos dalijasi pusiau. Kadangi įstrižainės DB_1 vidurio taškas yra O, tai ir AC_1 eina per tą patį tašką.

Analogiškai įrodytume, kad ir ketvirtoji įstrižainė BD_1 eina per tašką O, kuris ją dalija pusiau. Kurį lygiagretainį dabar turėtume nagrinėti?

2 užduotis. Įrodykite, kad stačiakampio gretasienio įstrižainės kvadratas lygus jo matmenų kvadratų sumai.



Duota: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — stačiakampis gretasienis.

Įrodyti: $BD_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$.

Prizmės paviršius ir tūris

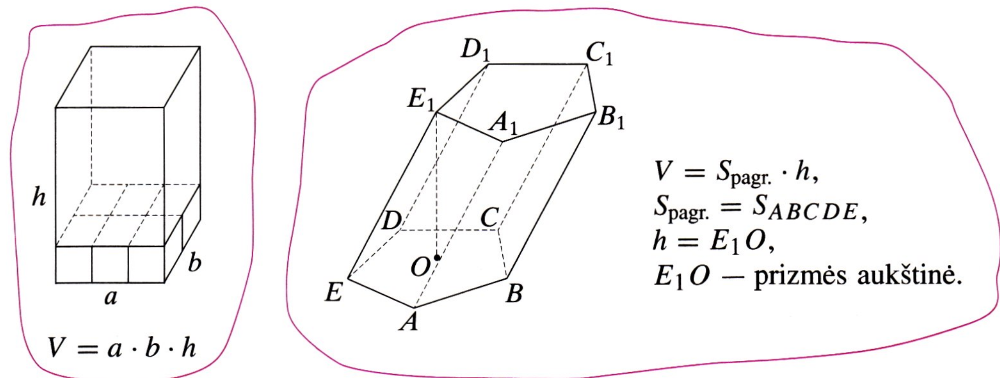
Prizmės *paviršiaus plotas* yra visų prizmės sienų plotų suma.

Prizmės *šoninio paviršiaus plotas* yra lygus jos šoninių sienų plotų sumai.

Stačiakampį gretasienį, kurio matmenys a, b ir h yra sveikieji skaičiai, galima padalyti į $a \cdot b \cdot h$ kubelių, kurių briaunų ilgiai lygūs 1 (tūrio vienetų). Taigi tokio stačiakampio gretasienio tūris

$$V = a \cdot b \cdot h \quad \text{arba} \quad V = S_{\text{pagr.}} \cdot h.$$

čia $S_{\text{pagr.}} = ab$ yra pagrindo plotas, o h — šoninės briaunos aukštinės ilgis.



Naudojantis tūrio savybėmis įrodoma, kad ši formulė teisinga bet kokios prizmės tūriui skaičiuoti. Prizmės tūris lygus pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai:

$$V_{\text{prizm.}} = S_{\text{pagr.}} \cdot h.$$

Pratimai ir uždaviniai

87. Pasvirosios prizmės briauna pasvirusi į pagrindo plokštumą 30° kampu. Briaunos projekcijos pagrindo plokštumoje ilgis lygus $12\sqrt{3}$ cm. Apskaičiuokite prizmės aukštinės ir briaunos ilgius.

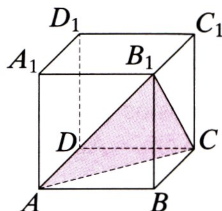
88. Pasvirosios prizmės šoninės briaunos ilgis 8 cm, prizmės pagrindai yra penkiakampiai. Atstumai tarp jos šoninių briaunų lygūs 3 cm, 4 cm, 5 cm, 4 cm, 3 cm. Raskite prizmės šoninio paviršiaus plotą.

89. Raskite stačiakampio gretasienio įstrižaines iš jo trijų matmenų:
a) 3; 6; 6; b) 12; 12; 14; c) 8; 9; 12.

90. Kubo paviršiaus plotas lygus 96 cm^2. Apskaičiuokite kubo įstrižainę.

91. Kubo įstrižainės ilgis $3\sqrt{3}$ cm. Apskaičiuokite kubo paviršiaus plotą ir tūrį.

92. Kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunų, išeinančių iš viršūnės B, galai sujungti atkarpomis.

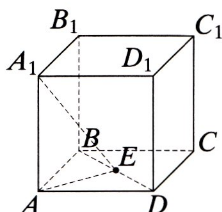


Gauto trikampio AB_1C plotas lygus $32\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Raskite kubo paviršiaus plotą ir tūrį.

93. Kubą kerta plokštuma, einanti per trijų briaunų, išeinančių iš vienos viršūnės, vidurio taškus. Gauto pjūvio plotas $2\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Apskaičiuokite kubo briauną.

94. Įrodykite, kad kubo įstrižainė yra statmena vienai iš pagrindo įstrižainių.

95. Duota: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — stačiakampis gretasienis, $AB = AD = 6$, $A_1E \perp BD$, $A_1E = 3\sqrt{6}$. Įrodykite: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — kubas.



96. Taisyklingosios keturkampės prizmės pagrindo plotas $100\,\text{cm}^2$, o įstrižainės ilgis $15\,\text{cm}$. Apskaičiuokite prizmės paviršiaus plotą.

97. Taisyklingosios šešiakampės prizmės pagrindo kraštinė lygi a, šoninės sienos — kvadratai. Apskaičiuokite:
a) prizmės įstrižinių pjūvių plotus;
b) prizmės šoninį ir visą paviršių;
c) prizmės tūrį.

Pastaba. Prizmės *įstrižiniu pjūviu* vadiname pjūvį, gautą kertant prizmę plokštuma, einančia per dvi vienoje sienoje nesančias šonines briaunas.

---

98. Stačiojo gretasienio šoninės briaunos ilgis $15\,\text{cm}$, pagrindo kraštinių ilgiai $16\,\text{cm}$ ir $30\,\text{cm}$, o pagrindo įstrižainių santykis $1 : \sqrt{7}$. Raskite mažesniojo įstrižinio pjūvio plotą.

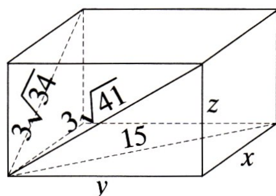
99. Stačiosios trikampės prizmės $ABCA_1B_1C_1$ šoninės briaunos ilgis $15\,\text{cm}$, o pagrindo kraštinių ilgiai yra $AB = 25\,\text{cm}$, $BC = 29\,\text{cm}$, $AC = 36\,\text{cm}$. Per viršūnę B_1 ir pagrindo kraštinę AC nubrėžtas prizmės pjūvis. Apskaičiuokite to pjūvio plotą.

100. Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinių ilgiai yra 3 ir 8, o kampas tarp kraštinių lygus 60°. Apskaičiuokite gretasienio tūrį, jei didesniosios jo įstrižainės ilgis 15.

101. Stačiakampio gretasienio pagrindo kraštinių ilgiai a ir b. Gretasienio įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro 60° kampą. Raskite gretasienio tūrį.

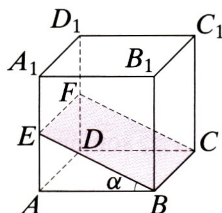
102. Stačiojo gretasienio pagrindas yra rombas, kurio mažesniosios įstrižainės ilgis 12 cm. Gretasienio tūris $1440\,\text{cm}^3$, o aukštinės ilgis 15 cm. Apskaičiuokite gretasienio:
a) pagrindo plotą; b) pagrindo kraštinės ilgį; c) šoninio paviršiaus plotą.

103. Stačiakampio gretasienio trijų sienų įstrižainių, išeinančių iš vienos viršūnės, ilgiai yra 15, $3\sqrt{34}$ ir $3\sqrt{41}$.



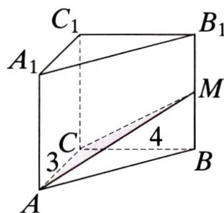
Raskite gretasienio:
a) matmenis x, y, z; b) įstrižainę.

104. Kubo briaunos ilgis 12 cm. Kubą kerta plokštuma, einanti per pagrindo kraštinę. Kampas tarp tos plokštumos ir pagrindo lygus $\alpha = 30^\circ$.



Raskite gautojo pjūvio plotą.

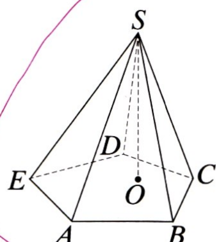
105. Stačiosios prizmės $ABCA_1B_1C_1$ pagrindas yra statusis trikampis ABC, kurio statiniai $AC = 3\,\text{cm}$, $BC = 4\,\text{cm}$. Per statinį AC išvesta plokštuma, kuri su pagrindo plokštuma sudaro kampą $\alpha = 45^\circ$.



Raskite gauto pjūvio ACM plotą.

18.2. Piramidės

Piramide vadinamas briaunainis, kurio viena siena (pagrindas) yra daugiakampis, o šoninės sienos — trikampiai, turintys bendrą viršūnę.

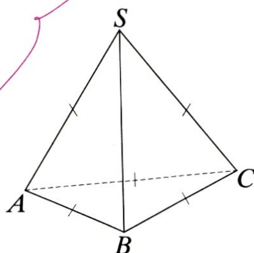


$SABCDE$ — piramidė;
$ABCDE$ — piramidės pagrindas;
trikampiai SAB, SBC, SCD, SDE ir SEA — piramidės šoninės sienos;
atkarpos SA, SB, SC, SD, SE — piramidės šoninės briaunos;
taškas S — piramidės viršūnė;
$SO \perp (ABC)$ — piramidės aukštinė.

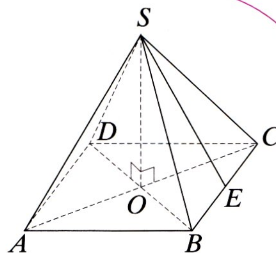
Jei piramidės pagrindas yra trikampis, tai piramidė vadinama *trikampe*, jei keturkampis — *keturkampe*, jei penkiakampis — *penkiakampe* ir t. t.

Piramidė vadinama *taisyklingąja*, jeigu jos pagrindas yra taisyklingasis daugiakampis ir piramidės aukštinė eina per to daugiakampio centrą. Taisyklingosios piramidės šoninės sienos aukštinė, nuleista iš piramidės viršūnės, vadinama *piramidės apotema*.

Taisyklingoji trikampė piramidė, kurios visos briaunos yra lygios, vadinama *tetraedru*.



$SABC$ — tetraedras;
$AB = BC = AC = AS = BS = CS$.



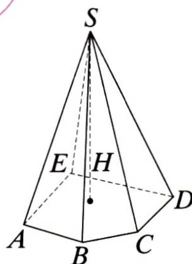
$SABCD$ — taisyklingoji keturkampė piramidė; SO — piramidės aukštinė;
$SE \perp BC$ — piramidės apotema.

Piramidės paviršius ir tūris

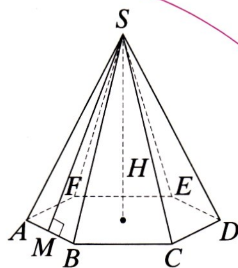
Piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus visų piramidės šoninių sienų plotų sumai.

Taisyklingosios piramidės šoninio paviršiaus plotą galime apskaičiuoti suradę vienos šoninės sienos plotą ir padauginę jį iš sienų skaičiaus.

Bet kurios piramidės viso paviršiaus plotas lygus šoninio paviršiaus ir pagrindo plotų sumai.



$SABCDE$ — netaisyklingoji penkiakampė piramidė;
$S_{\text{šon. pir.}} = S_{ABS} + S_{BCS} + S_{CDS} + S_{DES} + S_{EAS}$



$SABCDEF$ — taisyklingoji šešiakampė piramidė;
$S_{\text{šon. pir.}} = \frac{1}{2}Ph$, čia
P — pagrindo perimetras;
$h = SM$ — piramidės apotema.

Bet kurios piramidės tūris lygus pagrindo ploto ir piramidės aukštinės sandaugos trečdaliui:

$$V_{\text{pir.}} = \frac{1}{3}S_{\text{pagr.}}H,$$

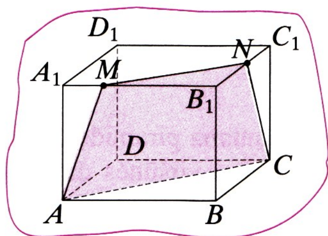
$S_{\text{pagr.}}$ *— piramidės pagrindo plotas,* H *— piramidės aukštinės ilgis.*

18.3. Briaunainių pjūviai

Sprendžiant uždavinius, dažnai tenka braižyti briaunainių pjūvius. Neretai geras brėžinys — jau pusė sėkmės. Įsivaizduokime plokštumą. Ji dalija erdvę į dvi dalis (puserdves). Jeigu abiejose puserdvėse yra briaunainio taškų, sakome, kad plokštuma kerta briaunainį. Kertančioji plokštuma briaunainio sienas kerta atkarpomis. Daugiakampis, kurio kraštinės yra tos atkarpos, vadinamas *briaunainio pjūviu.* Pjūviui nubraižyti pakanka rasti briaunainio briaunų ir kertamosios plokštumos susikirtimo taškus. Taškus, esančius vienoje sienoje, sujungiame atkarpomis. Šitaip gauname briaunainio pjūvį. Brėžinyje pjūvis paprastai užbrūkšniuojamas.
Išnagrinėkime pjūvių braižymo pavyzdžių.

1 PAVYZDYS. Nubraižykime gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pjūvį, gautą kertant jį plokštuma, einančia per viršūnes A, C ir briaunos A_1B_1 tašką M.
Brėžimas. 1) Taškai A ir C yra vienoje sienoje, todėl galime nubrėžti atkarpą AC.
2) Taškai A ir M irgi yra vienoje sienoje, todėl nubrėžkime atkarpą AM.
3) Pjūvio plokštuma priešingų gretasienio sienų plokštumas kerta lygiagrečiomis tiesėmis, todėl plokštuma kerta sieną $A_1B_1C_1D_1$ atkarpa MN, $MN \parallel AC$.

4) Sujungiame taškus N ir C, nes jie yra vienoje sienoje.



Gavome trapeciją $AMNC$ — tai ir yra ieškomasis pjūvis.

2 PAVYZDYS. Tetraedro $SABC$ briaunose SB ir SC pažymėti taškai M ir N, o sienoje ABC vidaus taškas K.

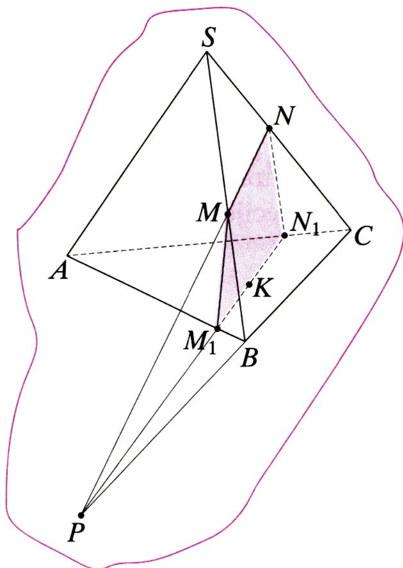
Nubraižykime tetraedro pjūvį, gautą tetraedrą perkirtus plokštuma MNK.

Brėžimas. 1) Sujungiame atkarpa vienoje sienoje esančius taškus M ir N.

2) Taškas K priklauso pagrindo plokštumai ir plokštumai MNK. Ieškosime dar vieno tų plokštumų bendro taško. Juo gali būti plokštumos SBC tiesių NM ir CB susikirtimo taškas P.

3) Brėžiame tiesę PK, kuri briauną AB kerta taške M_1, o briauną AC — taške N_1.

4) Brėžiame atkarpas MM_1 ir NN_1.



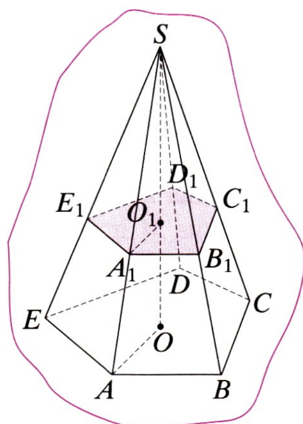
Gavome keturkampį MNN_1M_1, kuris yra ieškomasis pjūvis.

Jeigu tiesės NM ir CB būtų lygiagrečios, tada per tašką K brėžtume tiesę, lygiagrečią su MN (kodėl?). Tos tiesės susikirtimo su briaunomis AB ir AC taškai M_1 ir N_1 būtų ieškomo pjūvio viršūnės.

18.4. Nupjautinės piramidės

Piramidės dalis, esanti tarp jos pagrindo ir plokštumos, kertančios piramidę ir lygiagrečios pagrindo plokštumai, vadinama *nupjautine piramide*.

PAVYZDYS Nubraižykime nupjautinę piramidę, kuri gaunama piramidę $SABCDE$ kertant plokštuma, lygiagrečia pagrindams ir atkertančia nuo viršūnės du trečdalius piramidės aukštinės.



1) Atidėkime piramidės aukštinėje SO tašką O_1, kad būtų $\frac{SO_1}{SO} = \frac{2}{3}$.
2) Per tašką O_1 brėžiame $O_1A_1 \parallel OA$ $(O_1A_1 \cap SA = A_1)$.
3) Per tašką A_1 brėžiame $A_1B_1 \parallel AB$.
4) Per tašką B_1 brėžiame $B_1C_1 \parallel BC$ ir t. t.

Gauname pjūvį $A_1B_1C_1D_1E_1$, šis daugiakampis yra antrasis nupjautinės piramidės pagrindas, OO_1 yra nupjautinės piramidės aukštinė, trapecijos ABB_1A_1, BCC_1B_1 ir kt. — šoninės nupjautinės piramidės sienos.

Užduotis. Įsitikinkite, kad nupjautinės piramidės pagrindai $A_1B_1C_1D_1$ ir $ABCD$ yra panašieji daugiakampiai. Raskite jų plotų santykį.

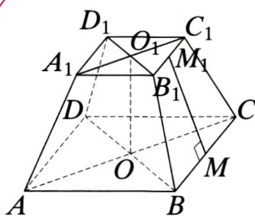
Nupjautinė piramidė vadinama *taisyklingąja*, jei ji gauta kertant taisyklingąją piramidę plokštuma, lygiagrečia pagrindui. Taisyklingosios nupjautinės piramidės pagrindai yra panašūs taisyklingieji daugiakampiai, o šoninės sienos — lygios ir lygiašonės trapecijos. Šios trapecijos aukštinė vadinama taisyklingosios nupjautinės piramidės *apotema*.

Nupjautinės piramidės paviršius ir tūris

Netaisyklingosios nupjautinės piramidės *šoninio paviršiaus plotą* apskaičiuojame sudėję visų jos šoninių sienų (trapecijų) plotus.

Taisyklingosios nupjautinės piramidės visos šoninės sienos lygios, taigi ieškant šoninio paviršiaus ploto užtenka rasti vienos sienos plotą ir padauginti jį iš sienų skaičiaus.

Bet kurios nupjautinės piramidės *viso paviršiaus plotas* lygus jos šoninio paviršiaus ir pagrindų plotų sumai.



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — taisyklingoji keturkampė nupjautinė piramidė;
$S_{\text{šon. pir.}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)h$,
čia $P_1 = AB + BC + CD + DA$ — didžiojo pagrindo perimetras;
$P_2 = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A_1$ — mažojo pagrindo perimetras;
$h = MM_1$ — apotema;
$S_{\text{pir.}} = S_{\text{šon. pir.}} + S_{ABCD} + S_{A_1B_1C_1D_1}$

Nupjautinę piramidę gauname atkirtę nuo piramidės plokštuma, lygiagrečia pagrindui, mažesnę piramidę. Taigi nupjautinės piramidės tūris lygus didžiosios ir mažosios piramidžių tūrių skirtumui. Tačiau nupjautinės piramidės tūrį galime apskaičiuoti ir kitaip.

Jei S_1 yra nupjautinės piramidės didžiojo, S_2 — mažojo pagrindo plotas, o H — piramidės aukštinė, tai nupjautinės piramidės tūris

$$V_{\text{pir.}} = \frac{1}{3}H\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right).$$

Taigi bet kurios nupjautinės piramidės tūris lygus aukštinės ilgio trečdaliui, padaugintam iš trijų dėmenų sumos, kurią sudaro didžiojo pagrindo plotas, mažojo pagrindo plotas ir tų plotų geometrinis vidurkis.

Pratimai ir uždaviniai

106. Raskite taisyklingosios keturkampės piramidės įstrižinio pjūvio plotą, kai pagrindo kraštinės ilgis 20 cm, o šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro 45° kampą.

Pastaba. Piramidės pjūvis, gautas perkirtus ją plokštuma, einančia per dvi vienoje sienoje nesančias šonines briaunas, vadinamas piramidės *įstrižiniu pjūviu.*

107. Taisyklingosios keturkampės piramidės aukštinės ilgis 8, o pagrindo kraštinės — 12. Apskaičiuokite piramidės:

a) šoninio paviršiaus plotą; b) viso paviršiaus plotą; c) tūrį.

108. Cheopso piramidė yra taisyklingosios keturkampės piramidės formos. Jos briaunos ilgis ≈ 216 m, o pagrindo kraštinės ilgis ≈ 224 m. Apskaičiuokite piramidės:

a) šoninio paviršiaus plotą; b) tūrį.

Atsakymą pateikite 1 m^2 ir 1 m^3 tikslumu.

109. Taisyklingosios trikampės piramidės aukštinės ilgis 12 cm, o šoninės sienos apotemos ilgis 13 cm. Apskaičiuokite piramidės:

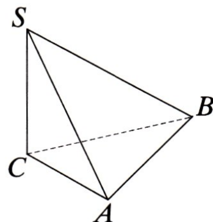
a) šoninio paviršiaus plotą; b) viso paviršiaus plotą; c) tūrį.

110. Taisyklingosios šešiakampės piramidės aukštinės ilgis $2\sqrt{6}$ dm, o pagrindo plotas $24\sqrt{3}$ dm^2. Apskaičiuokite piramidės:
a) tūrį; b) pagrindo kraštinės ilgį; c) šoninio paviršiaus plotą.

111. Piramidės pagrindas yra statusis trikampis, kurio statinių ilgiai yra 8 cm ir 15 cm. Piramidės aukštinė eina per pagrindo stačiojo kampo viršūnę ir lygi $5\frac{5}{17}$ cm. Raskite piramidės viso paviršiaus plotą.

112. Piramidės pagrindas — statusis trikampis, kurio statiniai lygūs 3 cm ir 4 cm. Piramidės sienos, einančios per šio trikampio statinius, yra statmenos trikampio plokštumai. Pasviroji šoninė siena su pagrindo plokštuma sudaro 30° kampą. Apskaičiuokite piramidės šoninio paviršiaus plotą.

113. Duota: $SABC$ — piramidė;
$SC \perp (ABC)$;
$SC = AB = BC = AC = a$;
Raskite: a) piramidės tūrį;
b) viso piramidės paviršiaus plotą.



114. Trikampės piramidės $DABC$ šoninės briaunos AD, BD ir CD yra poromis statmenos. Jų ilgiai atitinkamai yra a, b, c. Raskite piramidės tūrį.

115. Piramidės pagrindas yra kvadratas, kurio kraštinė lygi 5 cm. Piramidės aukštinė lygi 12 cm ir eina per vieną pagrindo viršūnę. Apskaičiuokite piramidės viso paviršiaus plotą.

116. Piramidės pagrindas yra stačiakampis, kurio kraštinės lygios 7 cm ir 10 cm. Piramidės aukštinė eina per vieną pagrindo viršūnę ir lygi 24 cm. Apskaičiuokite piramidės šoninio paviršiaus plotą.

117. Piramidės pagrindas — lygiagretainis, o aukštinė eina per pagrindo įstrižainių susikirtimo tašką. Įrodykite, kad kiekviena plokštuma, einanti per piramidės aukštinę, dalija piramidės šoninį paviršių į dvi lygiaplotes dalis.

118. Taisyklingosios nupjautinės keturkampės piramidės aukštinės ilgis 7 cm, o pagrindų kraštinių ilgiai yra 14 cm ir 2 cm. Apskaičiuokite piramidės:
a) šoninės briaunos ilgį;
b) šoninio paviršiaus plotą (1 cm^2 tikslumu);
c) tūrį (1 cm^3 tikslumu).

119. Taisyklingosios nupjautinės trikampės piramidės aukštinės ilgis 5 cm, o pagrindų kraštinių ilgiai yra 30 cm ir 60 cm. Apskaičiuokite piramidės:
a) šoninės sienos aukštinės (apotemos) ilgį; b) šoninio paviršiaus plotą; c) tūrį.

120. Akvariumas yra taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės formos. Jo gylis 60 cm, apatinio pagrindo kraštinės ilgis 1 m, o viršutinio — 50 cm. Kiek litrų vandens telpa akvariume?

121. Nupjautinės piramidės tūris lygus 76 m^3, aukštinės ilgis 6 m, mažesniojo pagrindo plotas 8 m^2. Raskite didesniojo pagrindo plotą.

122. Piramidės pagrindas yra trikampis, kurio kraštinių ilgiai 27 cm, 29 cm ir 52 cm. Visi dvisieniai kampai prie pagrindo lygūs po 60°. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

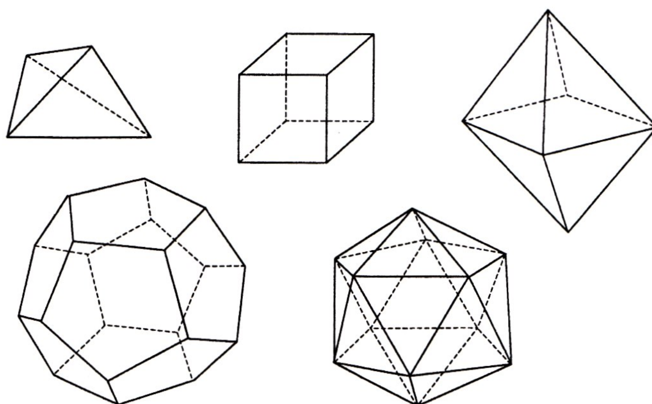
123. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo plotas Q, o dvisieniai kampai, kurių briaunos yra pagrindo kraštinės, lygūs α. Įrodykite, kad $S_{\text{šon.}} = \frac{Q}{\cos\alpha}$.

124. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinės ilgis 4 cm, o dvisieniai kampai prie pagrindo lygūs 60°. Apskaičiuokite piramidės šoninio paviršiaus plotą.

125. Piramidės pagrindas — rombas, kurio kraštinės ilgis yra 10 cm ir smailieji kampai lygūs 30°. Piramidės visi dvisieniai kampai prie pagrindo lygūs 60°. Raskite piramidės viso paviršiaus plotą.

Briaunainio sienos yra daugiakampiai. Dažniausiai ne visi jie yra lygūs. Tačiau yra keletas briaunainių, kurių visos sienos yra lygūs daugiakampiai. Ir ne bet kokie — o taisyklingieji. Du tokius briaunianius gerai žinome — tai tetraedras ir kubas.

Ar yra daugiau? Pasirodo, yra, tačiau tik penki. Jie vadinami taisyklingaisiais briaunainiais, o kartais — Platono kūnais, nes juos tyrinėjo ir šis didysis antikos filosofas.



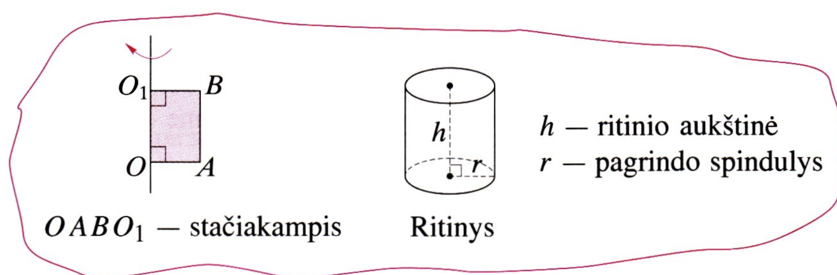
Platono kūnai: tetraedras, kubas, oktaedras, dodekaedras ir ikosaedras.

19. Sukiniai

Erdviniai kūnai, kuriuos gauname sukdami plokštumos figūrą apie pasirinktą tiesę, vadinami *sukiniais*. Pasirinktoji tiesė, apie kurią sukame plokštumos figūrą, vadinama *sukimo ašimi*.

19.1. Ritinys

Kūnas, gautas stačiakampį sukant apie vieną jo kraštinių, vadinamas *ritiniu*. Sukime stačiakampį $OABO_1$ apie jo kraštinę OO_1.



$OABO_1$ — stačiakampis

Ritinys

Kraštinė OO_1, apie kurią sukame, vadinama ritinio *aukštine*. Tiesė, kurioje yra ta kraštinė, bus sukimo ašis. Ritinio sukimo ašis dar vadinama ritinio ašimi. Kraštinė AB vadinama ritinio *sudaromąja* (ji lygi aukštinei), o paviršius, kurį nubrėžia sudaromoji — ritinio *šoniniu paviršiumi*.
Skrituliai, kuriuos nubrėžia stačiakampio kraštinės OA ir O_1B, vadinami ritinio *pagrindais*.

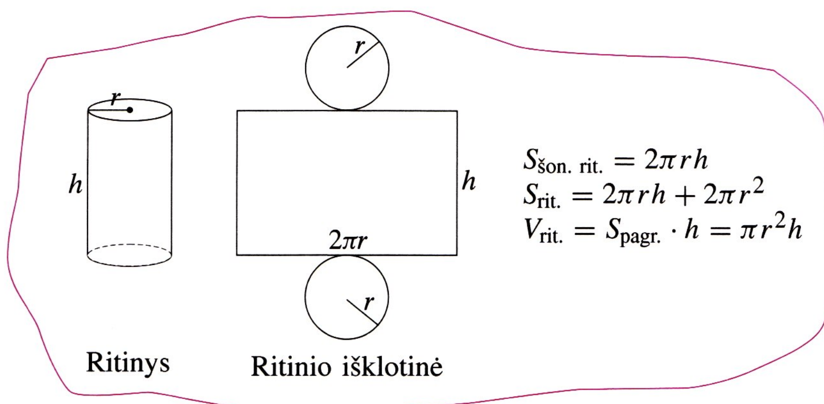
Ritinio išklotinė, paviršius ir tūris

Jeigu ritinio šoninį paviršių išklosime plokštumoje, tai gausime stačiakampį, kurio ilgis lygus ritinio pagrindo apskritimo ilgiui $2\pi r$, o plotis — ritinio aukštinei h. Taigi ritinio šoninio paviršiaus plotas lygus

$$S_{\text{šon. rit.}} = 2\pi rh.$$

Visą ritinio paviršių sudaro jo šoninis paviršius ir du pagrindai — lygūs skrituliai. Taigi visą ritinio paviršiaus plotą skaičiuojame taip:

$$S_{\text{rit.}} = S_{\text{šon. rit.}} + 2S_{\text{pagr.}},$$
$$S_{\text{rit.}} = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$



Ritinio tūris skaičiuojamas taip pat, kaip ir prizmės tūris:

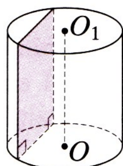
$$V_{rit.} = S_{pagr.} \cdot h,$$

$$V_{rit.} = \pi r^2 h,$$

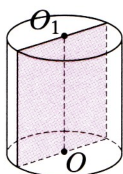
čia r — pagrindo spindulys, h — ritinio aukštinė.

Ritinio pjūviai

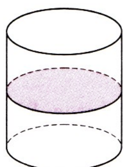
Kertant ritinį plokštuma, lygiagrečia jo ašiai (plokštumos atstumas nuo ritinio ašies mažesnis už pagrindo spindulį), pjūvyje gaunamas stačiakampis.



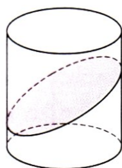
Kai kertančioji plokštuma eina per ritinio ašį, gauname didžiausią galimą stačiakampį, kuris vadinamas *ašiniu pjūviu*. Šio stačiakampio dvi kraštinės yra ritinio sudaromosios, o kitos dvi — ritinio pagrindų skersmenys.



Kertant ritinį plokštuma, lygiagrečia pagrindams, pjūvyje gaunamas jiems lygus skritulys.

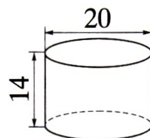


Kai plokštuma kerta visas sudaromąsias, bet nėra lygiagreti pagrindams, pjūvio kontūras yra „ištemptas apskritimas“; tokia figūra vadinama *elipse*.



Pratimai ir uždaviniai

126. Apskaičiuokite ritinio:
a) šoninio paviršiaus plotą;
b) viso paviršiaus plotą;
c) tūrį.



127. Ritinio ašinis pjūvis yra kvadratas, o jo šoninio paviršiaus plotas lygus $24\,\text{dm}^2$. Raskite ritinio pagrindo plotą.

128. Ritinio ašinis pjūvis yra kvadratas, kurio įstrižainė lygi $10\sqrt{2}$. Raskite ritinio:
a) ašinio pjūvio plotą;
b) viso paviršiaus plotą;
c) tūrį.

129. Kvadratas, kurio kraštinė lygi 5 dm, sukamas apie vieną jo kraštinę. Raskite gautojo kūno:
a) viso paviršiaus plotą;
b) tūrį.

130. Ritinio ašinio pjūvio plotas $320\,\text{cm}^2$, o pagrindo plotas $64\pi\ \text{cm}^2$. Apskaičiuokite ritinio:
a) viso paviršiaus plotą;
b) tūrį.

131. Stačiakampio formos skardos lapas, kurio ilgis 8 dm, o plotis 4 dm, sulenkiamas į ritinį. Raskite ritinio šoninio paviršiaus plotą ir tūrį, kai ritinio aukštis lygus:
a) 8 dm; b) 4 dm.

132. Ritinio šoninio paviršiaus išklotinės įstrižainė lygi $4\sqrt{3}$ ir su išklotinės pagrindu sudaro 30° kampą. Raskite ritinio viso paviršiaus plotą.

133. Ritinio paviršiaus plotas yra $120\pi\ \text{cm}^2$, o šoninio paviršiaus plotas $88\pi\ \text{cm}^2$. Apskaičiuokite ritinio tūrį.

134. Ritinio ašiai lygiagreti plokštuma nutolusi nuo jos $10\sqrt{3}$ cm atstumu ir nuo pagrindo apskritimo atkerta 60° lanką. Ritinio aukštinė lygi 30 cm. Apskaičiuokite ritinio:
a) pjūvio plotą;
b) šoninio paviršiaus plotą;
c) tūrį.

135. Ritinio tūris yra 24π cm^3, o jo aukštinė 1,5 karto didesnė už pagrindo skersmenį. Apskaičiuokite ritinio viso paviršiaus plotą.

136. Ritinio aukštinės ilgis 18 cm, o pagrindo skersmuo 30 cm. Ritinys kertamas jo ašiai lygiagrečia plokštuma. Gautas pjūvis yra kvadratas. Raskite atstumą nuo ritinio ašies iki pjūvio plokštumos.

137. Ritinio aukštinė lygi 4, o ašinio pjūvio plotas 30. Ritinys kertamas jo ašiai lygiagrečia plokštuma. Atstumas tarp ritinio ašies ir tos plokštumos lygus 3. Raskite pjūvio plotą.

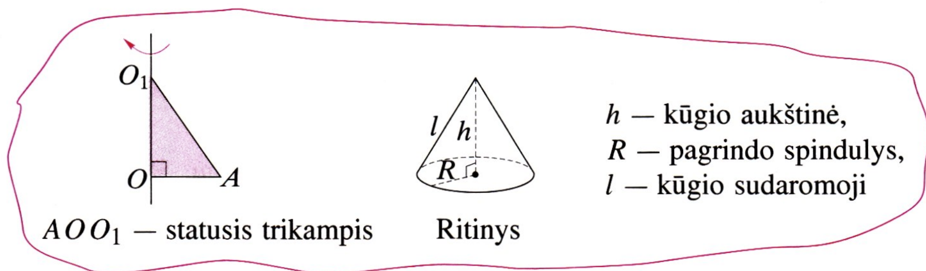
138. Indas su dangčiu yra ritinio formos. Jo pagrindo skersmuo 0,8 m, o aukštis — 1,2 m. Kiek kvadratinių metrų skardos sunaudota jam pagaminti? (Siūlėms reikia pridėti 13%.)

139. Į ritinio formos indą, kurio pagrindo skersmuo 20 cm, įpilta 3,5 litrai vandens. Iki kokio aukščio pakilo vandens lygis inde? Atsakymą pateikite 0,1 cm tikslumu, imdami $\pi \approx 3{,}14$.

140. Ritinys gaunamas sukant stačiakampį apie vieną jo kraštinių. Stačiakampio plotas lygus S, o stačiakampio įstrižainių susikirtimo taško brėžiamo apskritimo ilgis C. Įrodykite, kad ritinio tūris $V = CS$.

19.2. Kūgis

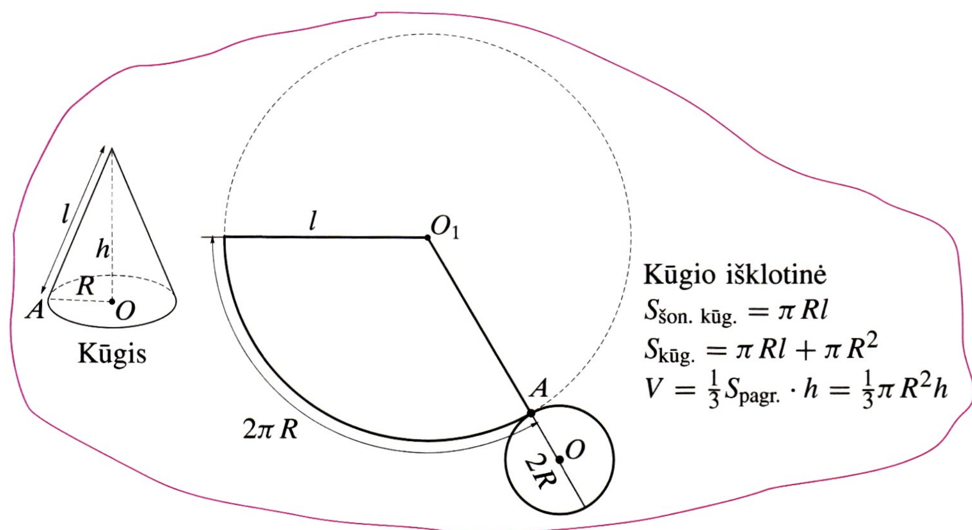
Kūnas, gautas statųjį trikampį sukant apie vieną jo statinį, vadinamas *kūgiu*. Sukime statųjį trikampį AOO_1 apie jo statinį OO_1.



Kraštinė OO_1, apie kurią sukame, vadinama kūgio aukštine. Tiesė, kurioje yra ta kraštinė, bus sukimosi arba kūgio *ašis*. Sukama trikampio įžambinė O_1A vadinama kūgio sudaromąja, o paviršius, kurį ji nubrėžia, — kūgio *šoniniu paviršiumi*. Skritulys, kurį nubrėžia trikampio statinis OA, vadinamas kūgio *pagrindu*.

Kūgio išklotinė, paviršius ir tūris

Jeigu kūgio šoninį paviršių išklosime plokštumoje, tai gausime skritulio, kurio spindulys lygus sudaromajai $l = O_1A$, išpjovą. Išpjovos lanko ilgis lygus kūgio pagrindo, kurio spindulys $R = OA$, apskritimo ilgiui $2\pi R$.
Kūgio viso paviršiaus plotą sudaro jo šoninio paviršiaus ir pagrindo plotų suma.



Kūgio šoninio paviršiaus ploto $S_{\text{šon. kūg.}}$ išraišką jo sudaromąja l ir pagrindo spinduliu R gauname iš proporcijos:

$$\frac{S_{\text{šon. kūg.}}}{S_{\text{skrit.}}} = \frac{2\pi R}{2\pi l}.$$

Taigi

$$S_{\text{šon. kūg.}} = \frac{2\pi R \cdot S_{\text{skrit.}}}{2\pi l} = \frac{R}{l}\pi l^2 = \pi Rl,$$

čia R — pagrindo spindulys, l — kūgio sudaromoji. Viso kūgio paviršiaus plotą gausime prie šoninio paviršiaus ploto pridėję pagrindo plotą:

$$S_{\text{kūg.}} = S_{\text{šon. kūg.}} + S_{\text{pagr.}}, \qquad S_{\text{kūg.}} = \pi Rl + \pi R^2.$$

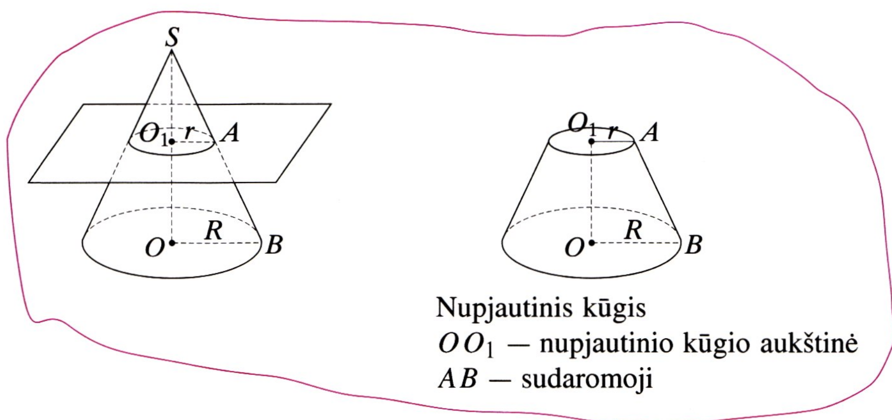
Kūgio tūris apskaičiuojamas pagal formulę:

$$V_{\text{kūg.}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

čia R — pagrindo spindulys, h — kūgio aukštinė.

Nupjautinis kūgis

Jeigu kūgį kirsime plokštuma, lygiagrečia kūgio pagrindui, pjūvyje gausime skritulį. Nuo kūgio ši plokštuma atkerta mažesnį kūgį. Likusioji kūgio dalis vadinama nupjautiniu kūgiu.

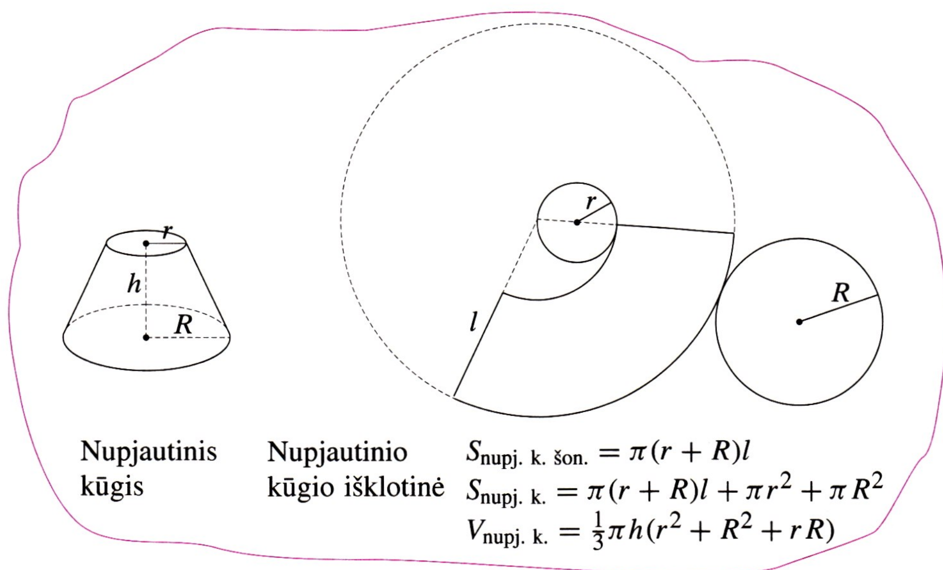


Nupjautinis kūgis
OO_1 — nupjautinio kūgio aukštinė
AB — sudaromoji

Kūgio aukštinės SO dalis OO_1 tarp nupjautinio kūgio pagrindų vadinama nupjautinio kūgio aukštine, o sudaromosios dalis AB — nupjautinio kūgio sudaromąja.

Tą patį nupjautinį kūgį galime gauti ir kitaip: jeigu trapeciją O_1ABO suksime apie O_1O, tai sukinys bus nupjautinis kūgis. Paviršius, kurį nubrėžia sudaromoji, vadinamas šoniniu nupjautinio kūgio paviršiumi. Šoninis nupjautinio kūgio paviršius lygus didesniojo ir mažesniojo kūgių šoninių paviršių skirtumui, o nupjautinio kūgio tūris — šių kūgių tūrių skirtumui.

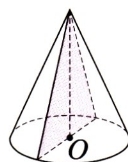
Tačiau skaičiuojant nupjautinio kūgio šoninį paviršių $S_{\text{nupj. k. šon.}}$ ir tūrį $S_{\text{nupj. k.}}$ patogiau naudotis gatavomis formulėmis.



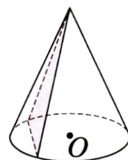
Kūgio pjūviai

Panagrinėkime, kokius pjūvius gausime, kai kūgį kirsime plokštuma, nelygiagrečia pagrindui.

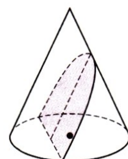
Kai plokštuma eina per kūgio aukštinę, pjūvis yra lygiašonis trikampis, kurio pagrindas — skritulio skersmuo, o šoninės kraštinės — kūgio sudaromosios. Tas pjūvis vadinamas *ašiniu pjūviu*.



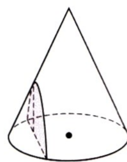
Kai plokštuma eina per kūgio viršūnę, bet ne per ašį ir kerta kūgį, pjūvis yra lygiašonis trikampis, kurio šoninės kraštinės — kūgio sudaromosios.



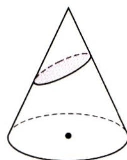
Kai plokštuma yra lygiagreti kūgio sudaromajai, kūgio paviršiaus ir šios plokštumos susikirtimo linija yra parabolė.



Kai plokštuma yra lygiagreti kūgio ašiai, tai tos plokštumos ir kūgio paviršiaus susikirtimo linija yra hiperbolė.



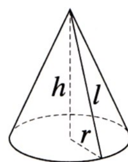
Kai plokštuma nėra lygiagreti nei sudaromajai, nei pagrindui, tai ji kerta kūgio paviršių kreive, vadinama elipse.



Atvejį, kai kertančioji plokštuma yra lygiagreti pagrindui, jau nagrinėjome — tokia plokštuma kūgio paviršių kerta apskritimu.

Pratimai ir uždaviniai

141. Apskaičiuokite kūgio viso paviršiaus plotą ir tūrį:
a) $r = 30\,\text{cm}$; $h = 40\,\text{cm}$;
b) $r = 120\,\text{mm}$; $l = 122\,\text{mm}$;
c) $r = 4{,}8\,\text{dm}$; $l = 5{,}2\,\text{dm}$.



142. Kūgio sudaromoji lygi 26 cm, o šoninio paviršiaus plotas $260\pi\,\text{cm}^2$. Raskite kūgio:
a) aukštinę; b) pagrindo plotą; c) tūrį.

143. Kūgio ašinis pjūvis yra lygiakraštis trikampis, kurio plotas $16\sqrt{3}\,\text{dm}^2$. Apskaičiuokite kūgio pagrindo spindulį ir kūgio aukštinę.

144. Kūgio aukštinė lygi $6\sqrt{3}\,\text{cm}$, o jo ašinis pjūvis yra lygiakraštis trikampis. Apskaičiuokite kūgio viso paviršiaus plotą ir tūrį.

145. Šieno stirta yra kūgio formos. Jos aukštis 9 m, o pagrindo apskritimo ilgis — 50 m. Kokia stirtoje esančio šieno masė, jei $1\,\text{m}^3$ šieno sveria 30 kg? Atsakymą pateikite 0,1 t tikslumu, imdami $\pi \approx 3{,}14$.

146. Kūgio sudaromoji lygi 12 cm. Raskite kūgio tūrį, jeigu jo išklotinė yra skritulio išpjova, kurios centrinis kampas lygus 120°.

147. Kūgio aukštinė lygi $5\sqrt{15}\,\text{cm}$. Raskite kūgio viso paviršiaus plotą, jeigu jo išklotinė yra skritulio išpjova, kurios centrinis kampas lygus 90°.

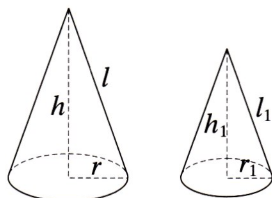
148. Lygiašonio trikampio šoninė kraštinė lygi 13 cm, o kampas prie pagrindo 60°. Šis trikampis sukamas apie tiesę, kurioje yra jo pagrindas. Raskite gauto sukimosi kūno:
a) paviršiaus plotą; b) tūrį.

149. Kūgio aukštinė lygi 4 cm, o jo viso paviršiaus plotas $24\pi\,\text{cm}^2$. Apskaičiuokite kūgio:

a) sudaromąją ir pagrindo spindulį; b) tūrį;

c) šoninio paviršiaus išklotinės centrinį kampą.

150. Du kūgiai vadinami panašiais, jeigu jie yra gauti sukant panašius stačiuosius trikampius apie atitinkamas kraštines.
Brėžinyje duoti du panašūs kūgiai. Įrodykite, kad kūgių šoninių paviršių plotai sutinka kaip aukštinių arba spindulių kvadratai, o tūriai — kaip aukštinių arba spindulių kubai.



151. Kūgio aukštinė lygi H. Kokiu atstumu nuo kūgio viršūnės reikia išvesti pagrindui lygiagrečią plokštumą, kad ji kūgio šoninį paviršių padalytų į dvi lygiaplotes dalis?

152. Kūgio pagrindo spindulys yra $\sqrt[3]{2}$ m. Plokštuma, lygiagreti kūgio pagrindui, kerta kūgį ir dalija jo tūrį pusiau. Raskite pjūvio spindulį.

153. Kūgio aukštinė 15 dm. Jį kerta pagrindui lygiagreti plokštuma, nutolusi nuo viršūnės per 6 cm. Nuo jo atkirsto mažesniojo kūgio tūris lygus $216\,\text{dm}^3$. Apskaičiuokite pradinio kūgio tūrį.

154. Kūgio šoninio paviršiaus plotas $100\,\text{cm}^2$. Per kūgio aukštinės vidurio tašką išvesta plokštuma, statmena aukštinei. Apskaičiuokite gauto nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus plotą.

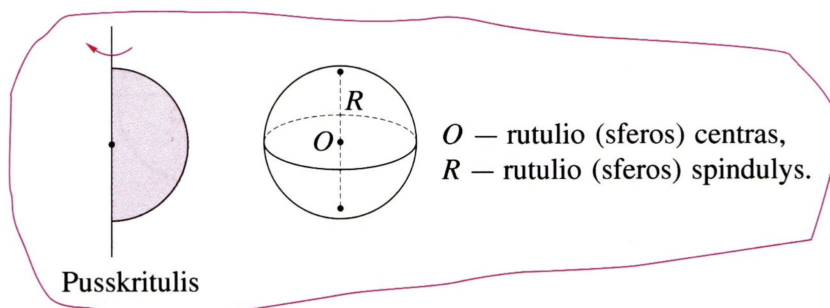
155. Nupjautinio kūgio pagrindų spinduliai 15 cm ir 30 cm, o sudaromoji 25 cm. Apskaičiuokite nupjautinio kūgio:

a) šoninio paviršiaus plotą; b) viso paviršiaus plotą; c) tūrį.

156. Nupjautinio kūgio pagrindų spinduliai lygūs $3\sqrt{3}$ cm ir $7\sqrt{3}$ cm, o sudaromoji su pagrindo plokštuma sudaro 30° kampą. Raskite ašinio pjūvio plotą.

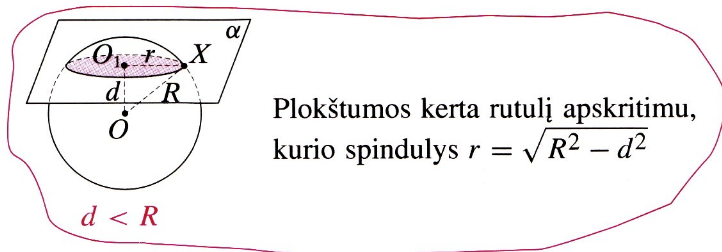
19.3. Rutulys. Sfera

Kūnas, gautas pusskritulį sukant apie jo skersmenį, vadinamas *rutuliu*.



Paviršius, kurį nubrėžia sukamo pusskritulio pusapskritimis, vadinamas rutulio paviršiumi arba *sfera*.
Sferą galima apibrėžti ir kitaip: „Sfera — tai paviršius, sudarytas iš visų erdvės taškų, vienodai nutolusių nuo vieno taško duotuoju atstumu.“ Tas taškas vadinamas sferos centru, o duotasis atstumas — sferos spinduliu. Sferos negalima išskloti plokštumoje.
Ištirsime sferos, kurios spindulys R, o centras O, ir plokštumos α tarpusavio padėtis. Atstumą nuo sferos centro iki plokštumos α pažymėję d, nagrinėkime tris atvejus: $d < R$, $d > R$ ir $d = R$.

Sferos (rutulio) pjūviai
Kai atstumas nuo sferos centro iki plokštumos yra mažesnis už sferos spindulį, tai plokštuma kerta sferą apskritimu.



Tegul O — sferos centras, X — sferos ir plokštumos α bendras taškas, $OO_1 \perp \alpha$ ($O_1 \in \alpha$), $OO_1 = d$, $OX = R$ — sferos spindulys, $0 < d < R$.
Įrodysime, kad plokštumos α ir sferos sankirta yra apskritimas. Iš stačiojo trikampio OO_1X:

$$O_1X^2 = OX^2 - OO_1^2$$

arba

$$O_1X = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

Vadinasi, taškas X yra apskritimo, kurio centras O_1 ir spindulys

$$\sqrt{R^2 - d^2}$$

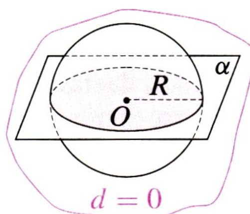
taškas. Kadangi X yra bet kuris sferos taškas, esantis plokštumoje α, tai visi sferos ir plokštumos sankirtos taškai priklauso šiam apskritimui. Pažymėję šio apskritimo spindulį r, gauname lygybę:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

Jei plokštuma kirsime ne sferą, bet rutulį, tai pjūvyje gausime skritulį, kurio spindulys lygus r.

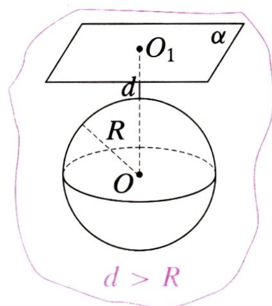
Užduotis. Įrodykite, kad plokštumos, vienodai nutolusios nuo sferos centro, kerta ją lygiais apskritimais.

Kai $d = 0$, tai plokštuma α eina per sferos centrą O. Pjūvyje gauname apskritimą, kurio spindulys lygus sferos spinduliui, t. y. $r = R$. Tas apskritimas vadinamas sferos didžiuoju apskritimu. Atitinkamas rutulio pjūvis vadinamas didžiuoju skrituliu.



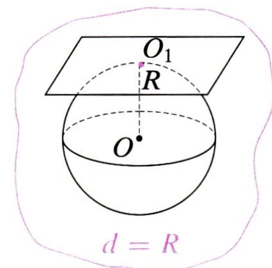
Tegul dabar $d > R$, t. y. atstumas nuo sferos centro iki plokštumos yra didesnis už sferos spindulį. Tegul O — sferos centras, $OO_1 \perp \alpha$ ($O_1 \in \alpha$), $OO_1 = d > R$. Imkime bet kurį kitą plokštumos tašką M. Visada bus teisinga nelygybė

$$OM > OO_1 > R.$$



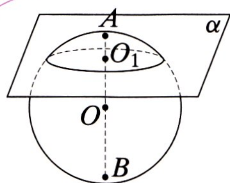
Visi plokštumos taškai yra už sferos, vadinasi, plokštuma α ir sfera neturi bendrų taškų.

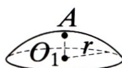
Jeigu $d = R$, tai plokštuma ir sfera turi vieną bendrą vadinamąjį lietimosi tašką.

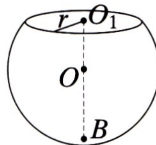


Rutulio ir jo dalių tūris, sferos ir jo dalių plotas

Rutulį kertanti plokštuma dalija jį į dvi dalis, kurias vadiname *rutulio nuopjovomis*.





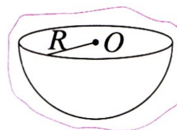


AB — rutulio skersmuo;
$AB \perp \alpha$;
AO_1 ir BO_1 — nuopjovų aukštinės.

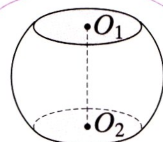
O_1 — nuopjovų pagrindo centras;
r — nuopjovų pagrindo spindulys.

Atkarpos, į kurias dalija kertančioji plokštuma jai statmeną skersmenį, yra tų *nuopjovų aukštinės*. Pjūvio skritulys vadinamas tų *nuopjovų pagrindu*.

Jei kertančioji plokštuma eina per rutulio centrą, tai nuopjova yra *pusrutulis*. Tada nuopjovos pagrindo spindulys lygus rutulio spinduliui.



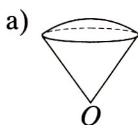
Rutulio dalis, esanti tarp dviejų lygiagrečių kertamųjų plokštumų, vadinama *rutulio sluoksniu*. Lygiagrečių plokštumų ir rutulio pjūviai yra skrituliai, kurie vadinami *rutulio sluoksnio pagrindais*, o jų bendras statmuo — rutulio *sluoksnio aukštine*.



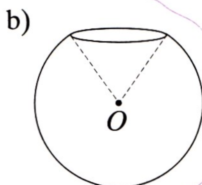
O_1O_2 — rutulio sluoksnio aukštinė

Rutulio išpjova vadinamas kūnas, gaunamas iš rutulio nuopjovos taip. Jei rutulio nuopjova yra mažesnė už pusrutulį, tai rutulio išpjovą gauname papildę nuopjovą kūgiu, kurio viršūnė yra rutulio centras, o pagrindas sutampa su nuopjovos pagrindu (a) brėž.). Jei nuopjova didesnė už pusrutulį, tai išpjovą gauname pašalinę minėtą kūgį iš nuopjovos (b) brėž.).

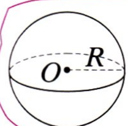
a)



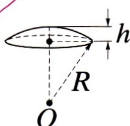
b)

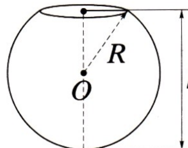


Rutulio ir jo dalių tūrius bei jų paviršiaus plotus skaičiuojame pagal formules.

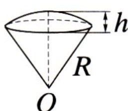


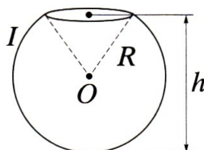
Rutulio tūris $V_{\text{rut.}} = \frac{4}{3}\pi R^3$
Sferos plotas $S_{\text{sfer.}} = 4\pi R^2$





Nuopjovos tūris $V_{\text{nuopj.}} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$
Sferos nuopjovos plotas $S_{\text{nuopj.}} = 2\pi Rh$





Rutulio išpjovos tūris $V_{\text{išpj.}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$
Rutulio išpjovos plotas $S_{\text{išpj.}} = S_{\text{nuopj.}} + S_{\text{kūgio}}$

Pratimai ir uždaviniai

157. Rutulį, kurio spindulys 26 cm, kerta plokštuma, nutolusi nuo centro 10 cm atstumu. Apskaičiuokite pjūvio ploto ir sferos ploto santykį.

158. Rutulio spindulys lygus 12 cm. Per rutulio spindulio vidurį nubrėžta plokštuma, statmena spinduliui. Apskaičiuokite:
a) gauto pjūvio plotą; b) didžiojo skritulio plotą; c) rutulio tūrį.

159. Pažymėkime Žemės rutulio spindulį R. Miestas N yra 60° Šiaurės platumos lygiagretėje.
a) Įrodykite, kad šios lygiagretės ilgis yra πR.
b) Kadangi Žemė sukasi apie savo ašį, tai apie ją sukasi ir miestas N. Apskaičiuokite kelią, kurį nuskrieja šis miestas per vieną valandą. ($R \approx 6000$ km.)

160. Rutulio spindulio ilgis lygus $16\sqrt{2}$. Per spindulio galą išvesta plokštuma, su spinduliu sudaranti 45° kampą. Apskaičiuokite gautojo pjūvio plotą.

161. Ritinio formos indo su vandeniu pagrindo spindulio ilgis 16 cm. Patalpinus į indą 20 cm skersmens rutulį vandens lygis pakilo ir apsėmė rutulį. Kiek pakilo vanduo? Atsakymą pateikite dešimtųjų tikslumu.

162. Sferos plotas lygus 144π cm^2. Raskite sferos ribojamo rutulio tūrį.

163. Dviejų lygiagrečių sferos pjūvių, esančių skirtingose sferos centro pusėse, spindulių ilgiai lygūs 12 cm ir 16 cm. Atstumas tarp kertančių plokštumų lygus 28 cm. Apskaičiuokite sferos spindulį.

164. Krepšinio kamuolio skersmuo 25 cm. Kiek odos reikia jam pasiūti, jei siūlėms pridedama 10% kamuolio paviršiaus ploto. Apskaičiuokite 1 cm^2 tikslumu, imdami $\pi \approx 3,14$.

165. Kūgio sudaromoji lygi pagrindo skersmeniui, jos ilgis 12 cm. Raskite rutulio spindulį, jeigu rutulio paviršiaus plotas lygus šio kūgio viso paviršiaus plotui.

166. Tuščiavidurio švininio rutulio išorinis skersmuo yra 9 cm, o vidinis — 7 cm. Apskaičiuokite rutulio masę, jei švino tankis yra $11,3\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. (Atsakymą pateikite 0,01 kg tikslumu.)

167. Du rutuliai, kurių spinduliai 3 dm ir $3\sqrt[3]{3}$ dm, sulydomi į vieną rutulį. Apskaičiuokite gautojo rutulio spindulį.

168. Rutulio skersmeniui statmena plokštuma dalija skersmenį į 9 cm ir 15 cm dalis. Apskaičiuokite gautų rutulio dalių tūrį.

169. Rutulio nuopjovos pagrindo spindulys lygus 4 dm, o rutulio spindulys lygus 5 dm. Apskaičiuokite rutulio nuopjovos tūrį.

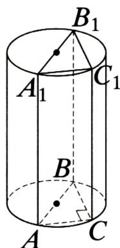
170. Rutulio spindulys lygus 30 cm. Rutulio išpjovos ašinio pjūvio kampas lygus $120°$. Apskaičiuokite:
a) išpjovos tūrį;
b) išpjovą sudarančių dalių — kūgio ir rutulio nuopjovos tūrių santykį.

171. Rutulio skersmuo lygus 18 cm. Jis padalytas į tris lygias dalis, o per dalijimo taškus išvestos skersmeniui statmenos plokštumos. Apskaičiuokite:
a) gautų rutulio nuopjovų tūrius; b) gauto rutulio sluoksnio tūrį.

20. Kartojimo uždaviniai

Sakome, kad prizmė įbrėžta į ritinį, jeigu jos pagrindai yra įbrėžti į ritinio pagrindus. Prizmės šoninės briaunos yra ritinio sudaromosios.

1. Į ritinį įbrėžta prizmė. Jos pagrindas yra statusis trikampis, vieno statinio ilgis 8, prie šio statinio esantis kampas lygus 60°. Prizmės aukštinė lygi 16. Raskite ritinio tūrį.

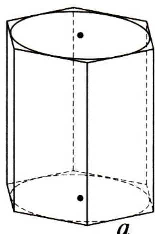


Duota: $ABCA_1B_1C_1$ — į ritinį įbrėžta prizmė,
$\angle C = 90°$, $BC = 8$, $\angle ABC = 60°$, $AA_1 = 16$.
Raskite: $V_{\text{rit.}}$.

2. Į ritinį įbrėžta taisyklingoji n-kampė prizmė. Raskite prizmės ir ritinio tūrių santykį, kai:
a) $n = 3$; b) $n = 4$; c) $n = 6$.

Sakome, kad prizmė apibrėžta apie ritinį, jeigu jos pagrindai yra apibrėžti apie ritinio pagrindus. Prizmės sienų plokštumos liečia ritinio šoninį paviršių.

3. Apie ritinį apibrėžta taisyklingoji šešiakampė prizmė, kurios pagrindo kraštinės ilgis a.



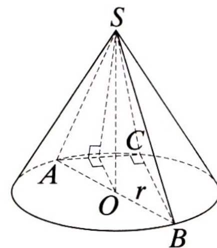
Raskite ritinio šoninio paviršiaus plotą, jei ritinio tūris lygus $\frac{3\pi a^3}{2}$.

4. Ritinio tūris lygus V. Raskite apie ritinį apibrėžtos taisyklingosios keturkampės prizmės tūrį.

5. Raskite tūrį ritinio, įbrėžto į taisyklingąją šešiakampę prizmę, kurios kiekviena briauna lygi 2 dm.

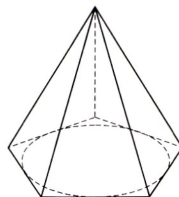
Sakome, kad piramidė įbrėžta į kūgį, jeigu jos pagrindas yra įbrėžtas į kūgio pagrindą, o piramidės ir kūgio viršūnės sutampa.

6. Į kūgį įbrėžta piramidė $SABC$, kurios pagrindas — status lygiašonis trikampis. Piramidės šoninė siena, einanti per vieną iš statinių, su pagrindo plokštuma sudaro $60°$ kampą. Raskite piramidės tūrį, jeigu kūgio pagrindo spindulys lygus r.



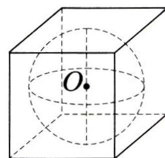
Sakome, kad piramidė apibrėžta apie kūgį, jeigu jos pagrindas yra apibrėžtas apie kūgio pagrindą, o piramidės ir kūgio viršūnės sutampa.

7. Taisyklingosios penkiakampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a, o dvisieniai kampai prie pagrindo lygūs $30°$. Piramidė apibrėžta apie kūgį, kurio pagrindo spindulys lygus r. Raskite piramidės šoninio paviršiaus plotą.



Sakome, kad briaunainis apibrėžtas apie sferą, jei sfera liečia visas jo sienas. Taip pat tada sakome, kad sfera įbrėžta į briaunainį.

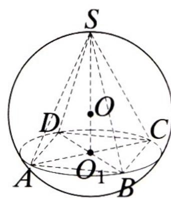
8. Rutulys liečia visas kubo sienas. Raskite kubo ir rutulio paviršių plotų santykį.



9. Sferos spindulys lygus R. Apie sferą apibrėžtas tetraedras. Raskite tetraedro paviršiaus plotą.

Sakome, kad briaunainis įbrėžtas į sferą, jei sferai priklauso visos jo viršūnės. Taip pat tada sakome, kad sfera apibrėžta apie briaunainį.

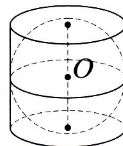
10. Į sferą įbrėžta taisyklingoji keturkampė piramidė. Įrodykite, kad sferos centras yra tos piramidės aukštinėje.



11. Sferos spindulys R. Raskite į sferą įbrėžto kubo paviršiaus plotą ir tūrį.

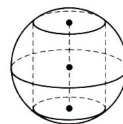
Sakome, kad sfera įbrėžta į ritinį, jei ją liečia ritinio pagrindai ir visos sudaromosios.

12. a) Ar į kiekvieną ritinį galima įbrėžti sferą? Kada tai galima padaryti?
b) Nubraižykite į ritinį įbrėžtos sferos ašinio pjūvio vaizdą.



13. Rutulys įbrėžtas į ritinį. Įrodykite, kad sferos ploto ir ritinio paviršiaus ploto santykis yra lygus rutulio ir ritinio tūrių santykiui.

14. a) Suformuluokite apibrėžtos apie ritinį sferos apibrėžimą.
b) Nubraižykite apibrėžtos apie ritinį sferos, ašinio pjūvio vaizdą.



Sakome, kad kūgis įbrėžtas į rutulį, jei jo pagrindas yra rutulio pjūvis, o viršūnė priklauso rutulio paviršiui.

Sakome, kad rutulys įbrėžtas į kūgį, jei kūgio pagrindas ir kiekviena sudaromoji liečia rutulį.

15. Į sferą įbrėžtas kūgis, o į tą kūgį — sfera. Raskite įbrėžtos ir apibrėžtos sferų plotų santykį, kai kampas tarp kūgio sudaromosios ir pagrindo plokštumos lygus 45°.

16. Į kūgį įbrėžtas rutulys, kurio spindulys lygus 3 dm. Raskite kūgio tūrį, jeigu jo sudaromoji pasvirusi į pagrindo plokštumą 60° kampu.

17. Į kūgį įbrėžtas rutulys. Raskite rutulio tūrį, jeigu kūgio sudaromoji lygi l ir į pagrindo plokštumą pasvirusi kampu α.

Kartojimo uždavinių atsakymai

15 skyrius (32–33 psl.)

1. d) A: $\mathrm{M_o} = 10$, $\mathrm{Q_1} = 4$, $\mathrm{M_d} = 7$, $\mathrm{Q_3} = 11$;
B: $\mathrm{M_o} = 7$, $\mathrm{M_o'} = 11$, $\mathrm{Q_1} = 7$, $\mathrm{M_d} = 9$, $\mathrm{Q_3} = 11$;
C: $\mathrm{M_o} = 9$, $\mathrm{Q_1} = 6$, $\mathrm{M_d} = 8$, $\mathrm{Q_3} = 9{,}5$;
D: $\mathrm{M_o} = 9$, $\mathrm{Q_1} = 6{,}5$, $\mathrm{M_d} = 8{,}5$, $\mathrm{Q_3} = 11$;
f) A: $\bar{x} = 7{,}8$; B: $\bar{x} = 9$; C: $\bar{x} = 7{,}9$; D: $\bar{x} = 8{,}4$;
g) A: $s \approx 4{,}372$; B: $s \approx 2{,}428$; C: $s \approx 3{,}401$; D: $s \approx 2{,}963$.

2. b) Liepa: $\mathrm{M_o} = 3$, $\mathrm{M_o'} = 10$; rugpjūtis: $\mathrm{M_o} = 4$;
c) liepa: $\mathrm{Q_1} = 3$, $\mathrm{Q_3} = 10$, $\mathrm{M_d} = 7$; rugpjūtis: $\mathrm{Q_1} = 4$, $\mathrm{Q_3} = 10$, $\mathrm{M_d} = 6$;
d) liepa: $\bar{x} \approx 7{,}1$; rugpjūtis: $\bar{x} \approx 7{,}0$;
e) liepa: $s \approx 4{,}66$; rugpjūtis: $s \approx 4{,}25$.

3. a) $\bar{x} = 34{,}92$; b) $s^2 \approx 41{,}24$; c) $[32; 37)$.

4. b) $\bar{x} = 0{,}9$, $\bar{y} = 31{,}1$, $s_x \approx 0{,}22$, $s_y \approx 2{,}13$; c) $r \approx 0{,}896$.

5. b) $\bar{x} \approx 258{,}3$, $\bar{y} \approx 259{,}6$, $s_x \approx 49{,}56$, $s_y \approx 49{,}10$; c) $r \approx 0{,}958$.

6. b) $\bar{x} \approx 3{,}25$, $\bar{y} \approx 587{,}5$, $s_x \approx 1{,}22$, $s_y \approx 359{,}31$; c) $r \approx -0{,}983$.

7. 686; 457.

8. 1.

10. $v_1 = \frac{\pi R}{10}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$, $v_2 = \frac{\pi R}{12}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$, $R \approx 44\,\mathrm{m}$.

12. 5.

13. 240°.

14. $(2; 4)$.

15. 16.

16. $\frac{121}{12^{12}} \approx 0{,}000054$.

20 skyrius (98–100 psl.)

1. 1024π.

2. a) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; b) $\frac{2}{\pi}$; c) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

3. $2\sqrt{3}\pi a^2$.

4. $\frac{4V}{\pi}$.

5. 6π dm^3.

6. $\frac{r\sqrt[3]{6}}{6}$.

7. $\frac{5ar}{\sqrt{3}}$.

8. $\frac{6}{\pi}$.

9. $12\sqrt{3}R^2$.

11. $S_{\text{pav}} = 8R^2$, $V = \frac{8R^3}{3\sqrt{3}}$.

12. a) Į ritinį galima įbrėžti sferą tada ir tik tada, kai ritinio aukštinės ilgis lygus jo pagrindo skersmeniui.

14. a) Sakome, kad sfera apibrėžta apie ritinį, jei ritinio pagrindai yra sferos apskritimai.

15. $3 - 2\sqrt{2}$.

16. 81π.

17. $\frac{4}{3}\pi l^3 \cos^3 \alpha \,\mathrm{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$.

Kartojimo medžiaga

1. Skaičiai ir reiškiniai

Paprastai skaičius užrašome naudodamiesi dešimtaine skaičiavimo sistema, pavyzdžiui:

$$1401 = 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1.$$

Dviženklius natūraliuosius skaičius užrašome dviem, triženklius trimis dešimtainiais skaitmenimis ir t. t. Pavyzdžiui, bet kurį triženklį skaičių galime užrašyti reiškiniu

$$\overline{xyz} = x \cdot 10^2 + y \cdot 10 + z.$$

Jei natūralusis skaičius m dalijasi iš n, tai n vadiname skaičiaus m dalikliu, o m — skaičiaus n kartotiniu.
Jei skaičius p ($p \geqslant 2$) turi lygiai du daliklius (1 ir p), tai jis vadinamas pirminiu. Jeigu skaičius turi daugiau kaip du daliklius, tai jis vadinamas sudėtiniu. Skaičius 1 turi tik vieną daliklį, taigi jis nevadinamas nei pirminiu, nei sudėtiniu.
Pirminių skaičių seka prasideda taip:

$$2, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 11, \quad 13, \quad \ldots$$

Bet kurį sudėtinį natūralųjį skaičių galime išskaidyti pirminių skaičių sandauga. Pavyzdžiui:

$$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2, \qquad 630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Tokiais skaidiniais patogu naudotis ieškant skaičių didžiausiojo bendrojo daliklio ar mažiausiojo bendrojo kartotinio. Pavyzdžiui:

$$\text{DBD}(600, 630) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30, \qquad \text{MBK}(600, 630) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 12\,600.$$

Racionaliuosius skaičius reiškiame paprastosiomis arba dešimtainėmis (kartais baigtinėmis, kartais begalinėmis periodinėmis) trupmenomis, pavyzdžiui:

$$\frac{2}{5} = 0{,}4, \qquad \frac{5}{6} = 0{,}833...$$

Begalines periodines dešimtaines trupmenas dažniausiai užrašome trumpai — nurodydami periodą, pavyzdžiui,

$$0{,}833... = 0{,}8(3).$$

Iracionalieji skaičiai reiškiami begalinėmis neperiodinėmis dešimtainėmis trupmenomis. Skaičiavimuose ir reiškiniuose naudojame arba jų apytiksles reikšmes arba specialius jų žymenis (tokius kaip $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, π ir t. t.).

Skaičiaus a modulio $|a|$ geometrinė prasmė — skaičių atitinkančio tiesės taško atstumas iki nulį atitinkančio taško. Modulį galime apibrėžti ir taip:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kai } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{kai } a < 0. \end{cases}$$

Bet kurį skaičių a galime užrašyti standartine išraiška:

$$a = b \cdot 10^m, \quad 1 \leqslant |b| < 10.$$

Pavyzdžiui: $21{,}12 = 2{,}112 \cdot 10^1$; $0{,}02112 = 2{,}112 \cdot 10^{-2}$; $-366 = -3{,}66 \cdot 10^2$.
Skaičius galime sudėti, atimti, dauginti ir dalyti (dalyti negalima iš 0). Naujus skaičius iš duotųjų taip pat galime gauti naudodamiesi šaknies sąvoka.
Jei $a \geqslant 0$, tai n-ojo laipsnio šaknimi iš a vadinamas skaičius b, su kuriuo galioja lygybė $b^n = a$. Šaknį žymime: $b = \sqrt[n]{a}$, a vadiname pošakniu, o n — šaknies rodikliu.
Iš neigiamųjų skaičių apibrėžiame tik nelyginio laipsnio šaknis, jos gali būti išreikštos šaknimis iš teigiamų skaičių. Pavyzdžiui: $\sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[7]{-8} = -\sqrt[7]{8}$.
Pertvarkydami reiškinius su šaknimis, naudojamės jų savybėmis:

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;
2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;
3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$;
4) $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$;
5) $\sqrt[n \cdot k]{a^k} = \sqrt[n]{a}$.

Naudodamiesi šaknimis, apibrėžiame teigiamų skaičių laipsnius su racionaliaisiais rodikliais:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0, n \geqslant 2, m \in \boldsymbol{Z}).$$

Laipsniai su racionaliaisiais rodikliais turi tas pačias savybes, kaip ir laipsniai su sveikaisiais rodikliais:

1) $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$;
2) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$;
3) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$;
4) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$;
5) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$.

Šiose lygybėse $a, b > 0$, o r, s — bet kokie racionalieji skaičiai.
Dažnai tenka pertvarkyti reiškinius, sudarytus iš skaičių bei kintamųjų. Vienas iš įrankių, kuriais naudojamės — greitosios daugybos formulės:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3.$$

Pratimai ir uždaviniai

1. Dviženklis skaičius dalijasi iš 3. Iš jo atėmę 45, gausime skaičių, užrašytą tais pačiais skaitmenimis, tik atvirkščia tvarka. Koks pradinis skaičius?

2. Keturženklio natūraliojo skaičiaus $n = \overline{xyxy}$ skaitmenų suma yra 14. Jeigu iš skaičiaus n atimtume skaičių $\overline{yxyx}$, gautume 2727. Raskite skaičių n.

3. Paprastąją trupmeną užrašykite dešimtaine:

a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{4}{9}$; c) $\frac{2}{11}$; d) $\frac{3}{11}$; e) $\frac{1}{6}$; f) $\frac{4}{7}$; g) $\frac{5}{7}$.

4. Begalinę periodinę dešimtainę trupmeną užrašykite paprastąja nesuprastinama trupmena:

a) $0,(5)$; b) $0,2(5)$; c) $0,5(2)$; d) $0,12(3)$.

5. Apskaičiuokite:

a) $\frac{0,(2)}{0,(3)} + \frac{0,(3)}{0,(2)}$;

b) $\frac{0,(12)+0,0(5)}{0,(17)}$;

c) $\frac{\left(1,(2)-\frac{3}{7}+0,32-\frac{50}{63}\right)\cdot 17\frac{1}{2}-0,4}{\left(2,(5)-0,4:\frac{18}{25}\right)\cdot\frac{13}{500}}$;

d) $1,7 : \frac{\left(4,5\cdot 1,(6)+3,75\right)\cdot\frac{296}{4995}}{\frac{5}{9}} - 0,41(6)$.

6. Naudodamiesi tik skriestuvu ir liniuote, realiųjų skaičių tiesėje atidėkite skaičius:

a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{2}{3}$; d) $\sqrt{2}$; e) $\sqrt{3}$; f) $\sqrt{5}$; g) $\sqrt{7}$; h) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. Įrodykite, kad:

a) $\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2}\cdot\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; b) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

yra natūralusis skaičius.

8. Įrodykite, kad:

a) $\frac{1}{3\sqrt{2}-4} - \frac{1}{3\sqrt{2}+4}$; b) $\frac{1}{5+2\sqrt{6}} + \frac{1}{5-2\sqrt{6}}$

yra racionalusis skaičius.

9. Apskaičiuokite:

a) $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot(3+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{2})$;

b) $3\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot(2+\sqrt{3})$;

c) $\frac{10-\sqrt{125}}{\sqrt{5(2-\sqrt{5})^2}}$;

d) $\frac{\sqrt{7(1-\sqrt{2})^2}}{1-\sqrt{2}}$.

10. Apskaičiuokite:

a) $\frac{x^2-3xy+y^2}{x+y+2}$, kai $x = 3+\sqrt{5}$, $y = 3-\sqrt{5}$;

b) $\frac{x^2\sqrt{(x+4)^2-16x}}{x-4}$, kai $x = \sqrt{7}$;

c) $\frac{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}+\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}{1+\sqrt[6]{x}} \cdot \sqrt{x}$, kai $x = 3$;

d) $\left(\frac{x^{\frac{5}{12}} \cdot x^{-\frac{3}{8}}}{x^{\frac{7}{24}}}\right)^{-\frac{4}{3}}$, kai $x = 125$;

e) $\left(\frac{x^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{6}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{2}{3}}$, kai $x = 0{,}001$, $y = 25$;

f) $\frac{x-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}-1} \cdot \left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}\right)^{-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, kai $x = 5$.

11. Suprastinkite reiškinį:

a) $\frac{a}{a-b} + \frac{5b}{a+b} \cdot \left(\frac{ab+a^2}{5b^2-5ab} + ab + a^2\right)$;

b) $\frac{5x-x^2-3}{2x} + \left(\frac{4}{x+3} + \frac{x+1}{2x} - 2\right) : \frac{x+1}{x+3}$.

12. Atlikite veiksmus su skaičiais, užrašytais standartine išraiška (atsakymą užrašykite taip pat standartine išraiška):

a) $\frac{2{,}5 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^{-10}}$;

b) $1{,}5 \cdot 10^8 + 2{,}4 \cdot 10^5$;

c) $\frac{2{,}3 \cdot 10^{-7} - 1{,}2 \cdot 10^{-5}}{2{,}1 \cdot 10^8 + 3{,}1 \cdot 10^9}$;

d) $\frac{5{,}1 \cdot 10^{12} + 1{,}5 \cdot 10^{11}}{5 \cdot 10^{-6} - 2{,}5 \cdot 10^{-5}}$.

2. Lygtys ir nelygybės

Sulyginę du reiškinius, į kuriuos įeina kintamieji, gauname lygtį; sujungę juos nelygybės ženklu — nelygybę. Lygties ar nelygybės kintamuosius vadiname nežinomaisiais. Lygties $A(x) = B(x)$ apibrėžimo sritis — tai aibė tų nežinomojo x reikšmių, su kuriomis reiškiniai $A(x)$ ir $B(x)$ apibrėžti. Tos nežinomojo x reikšmės, kurias įstačius į lygtį ji virsta teisinga skaitine lygybe, vadinamos lygties sprendiniais.
Pavyzdžiui, lygties

$$x(x-2)\sqrt{1-x} = 0$$

apibrėžimo sritis yra $(-\infty; 1]$, o sprendiniai — 0 ir 1.
Nelygybės $A(x) < B(x)$ (o taip pat ir $A(x) > B(x)$, $A(x) \leqslant B(x)$, $A(x) \geqslant B(x)$) apibrėžimo srities ir sprendinių sąvokos apibrėžiamos analogiškai.
Dvi lygtys (o taip pat ir dvi nelygybės) vadinamos ekvivalenčiomis, jeigu jų sprendinių aibės sutampa.
Pavyzdžiui, lygtys $(x-1)^2 = 0$ ir $\frac{x-1}{x+2} = 0$ yra ekvivalenčios, lygtys $\sqrt{x} = -1$ ir $\frac{1}{x} = 0$ taip pat ekvivalenčios (abi neturi sprendinių).
Panašiai apibrėžiame ir nelygybių ekvivalentumo sąvoką. Lygtis (taip pat ir nelygybes) sprendžiame pertvarkydami jas į paprastesnes lygtis (nelygybes), turinčias tuos pačius sprendinius, t. y. ekvivalenčias pradinei.
Išspręsti lygtį ar nelygybę reiškia surasti visus jos sprendinius arba nustatyti, kad jų nėra.
Išspręsti lygčių ar nelygybių sistemą reiškia surasti sprendinius, tinkančius sistemos visoms lygtims ar nelygybėms.
Jeigu lygtį $A(x) = B(x)$ pavyko pakeisti jai ekvivalenčia lygtimi

$$C(x)D(x) = 0,$$

tai sprendinius galime surasti spręsdami lygtis $C(x) = 0$ ir $D(x) = 0$. Pavyzdžiui, lygties

$$(x-1)(x+2)\sqrt{x} = 0$$

sprendinius gauname spręsdami lygtis $x - 1 = 0$, $x + 2 = 0$, $\sqrt{x} = 0$. Gauname tris skaičius 1, -2 ir 0, tačiau $x = -2$ nėra pradinės lygties sprendinys, taigi ji turi du sprendinius $x_1 = 0$ ir $x_2 = 1$.
Kartais išspręsti lygtį padeda lygties nežinomojo keitimas. Pavyzdžiui, į lygtį

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0$$

įstatę $y = x^2$ gauname: $y^2 - 3y + 2 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$. Pradinės lygties sprendinius gauname iš lygčių $x^2 = 1$, $x^2 = 2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -\sqrt{2}$, $x_4 = \sqrt{2}$.

Iracionaliąsias lygtis (t. y. lygtis, į kurias nežinomieji įeina po šaknų ženklais arba su trupmeniniais laipsnių rodikliais) dažnai pertvarkome keldami abi lygčių puses tuo pačiu laipsniu. Tačiau šitaip kartais gaunama lygtis, turinti daugiau sprendinių negu pradinė, todėl būtina patikrinti, ar visi gautieji sprendiniai tinka pradinei lygčiai.
Pavyzdžiui, pakėlę abi lygties

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

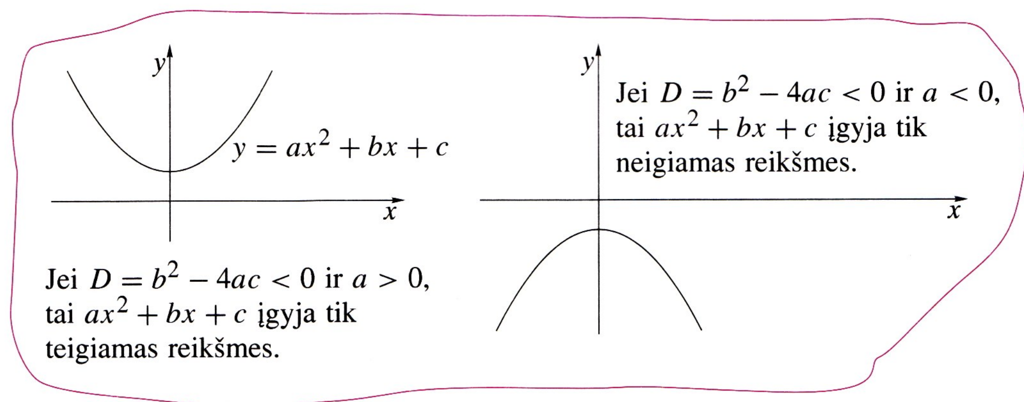
puses kvadratu, gauname lygtį $1 - x = x^2 - 4x + 3$, turinčią du sprendinius: $x_1 = 1$ ir $x_2 = 2$. Tačiau tik pirmasis sprendinys tinka pirmajai lygčiai.
Sudėtingesnes nelygybes su vienu kintamuoju dažniausiai sprendžiame intervalų metodu.
Prisiminkime, kaip skaidome kvadratinį trinarį

$$ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

tiesiniais daugikliais. Jei diskriminantas

$$D = b^2 - 4ac$$

yra neigiamas, tai lygtis $ax^2 + bx + c = 0$ sprendinių neturi ir kvadratinio trinario išskaidyti tiesiniais daugikliais negalime.



Jei $D = b^2 - 4ac \geqslant 0$, tai lygties $ax^2 + bx + c = 0$ sprendiniai yra

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad (x_1 = x_2, \text{ kai } D = 0),$$

ir

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Pavyzdžiui, nelygybės

$$\frac{x-2}{2x^2 + 5x - 3} < 0$$

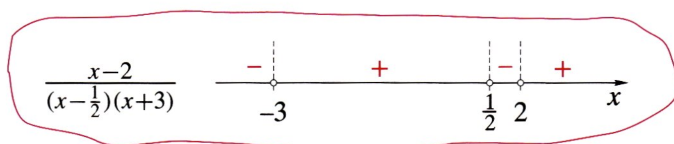
vardiklį išskaidę daugikliais

$$2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3),$$

galime ją pakeisti ekvivalenčia nelygybe

$$\frac{x - 2}{2(x - \frac{1}{2})(x + 3)} < 0.$$

Suskaidę skaičių tiesę taškais $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 2$ į keturis intervalus, nustatome nelygybės kairės pusės reiškinio ženklus šiuose intervaluose



ir gauname nelygybės sprendinių aibę $(-\infty; -3) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Pratimai ir uždaviniai

1. Su kuriomis a reikšmėmis lygtis turi sprendinių:

a) $(a - 2)x = 1$;
b) $(a^2 - 4)x = a - 2$;
c) $ax^2 - 12x + 9 = 0$;
d) $(a - 1)x^2 - 6x - 3 = 0$?

2. Su kuriomis p reikšmėmis lygtis neturi sprendinių:

a) $px = p - 1$;
b) $(4p^2 - 9)x = 2p - 3$;
c) $px^2 - 2x + 6 = 0$;
d) $4x^2 + px + 1 = 0$?

3. Ar ekvivalenčios lygtys:

a) $\frac{x^2-4}{x+2} = 3$ ir $(x - 2)(x^2 + 4) = 3x^2 + 12$;
b) $\frac{x^2-4}{x+2} = -4$ ir $(x - 2)(x^2 + 1) = -4 - 4x^2$;
c) $x^2 - 5x + 6 + \frac{1}{x-3} = \frac{1}{x-3}$ ir $x^2 - 5x + 6 = 0$;
d) $(x - 1)(x - 2)^2 = 0$ ir $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - x + 1) = 0$?

4. Išspręskite lygtį:

a) $\frac{3x}{x+4} + \frac{17}{x-4} = \frac{70}{x^2-16}$;
b) $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$;
c) $\frac{x^3-1}{x-1} - x - 2 = 0$;
d) $\frac{x^2+2}{x^3+1} + \frac{2x}{x-x^2-1} = \frac{1}{x+1}$.

5. Išspręskite lygtį:

a) $9x^4 - 13x^2 + 4 = 0$; b) $4x^4 + 17x^2 + 4 = 0$;

c) $4(5 - x^2)^2 - 9(5 - x^2) + 2 = 0$; d) $\frac{3x-2}{x} + \frac{4x}{3x-2} = 5$;

e) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - 4 \cdot \frac{x-1}{x+1} + 3 = 0$; f) $2\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 - 5 \cdot \frac{x^2+1}{x} + 2 = 0$.

6. Išspręskite lygtį:

a) $|3x - 2| = 5$; b) $|x(1 - x)| = 2$;

c) $0{,}6|x - 0{,}3| = x^2 + 0{,}27$; d) $|2 - x| = 5 - 4x^2$;

e) $|x - 1| - |x + 2| = 1$; f) $|x + 1| + |x - 2| = x - 2$.

7. Raskite didžiausią lygties sprendinį:

a) $|x^2 - 5x + 4| = 4$;

b) $\frac{2x^2-6}{|x|-1} = |x| + 3$.

8. Raskite mažiausią lygties sprendinį:

a) $|x - 3| + 2|x + 1| = 4$;

b) $|3x^2 + 5x - 9| = |6x + 15|$.

9. Išspręskite lygtį:

a) $(x - 1)\sqrt{x^2 - 4} = 0$; b) $x = \sqrt{8x + 9}$;

c) $\sqrt{x + 4} + x - 2 = 0$; d) $\sqrt{15 - x} + \sqrt{3 - x} = 6$;

e) $\sqrt{x + 5} + \sqrt{x} = \sqrt{4x + 9}$; f) $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x - 2} = 2\sqrt{x + 1}$;

g) $\sqrt{x^2 + 32} - 2\sqrt[4]{x^2 + 32} = 3$; h) $\sqrt{2x + 5} + \sqrt{-x - 3} = \sqrt{x^2 + 2x - 17}$;

i) $\sqrt{2x^2 + 3} + \sqrt[4]{5x + 2} = 0$; j) $\frac{x}{\sqrt{x-5}} + \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}} = 1$.

10. Išspręskite nelygybę:

a) $\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-1} \leqslant 0$; b) $\frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x-1} < 2$;

c) $\frac{x^2+7}{x^2+x-20} \geqslant 1$; d) $\frac{9}{(x+1)^2} \geqslant 1$;

e) $|5x + 1| - |2x - 4| \geqslant 3$; f) $\frac{3}{|x|} \leqslant \frac{x}{3} + 2$.

11. Raskite mažiausią nelygybės sprendinį:

a) $|x + 3| + |x - 4| \leqslant 11$;

b) $3|x| - |2x - 3| \leqslant 3x - 3$.

12. Raskite didžiausią sveikąjį nelygybės sprendinį:

a) $4x^2 + 4|x| - 63 \leqslant 0$;

b) $\left|\frac{-x^2+5x+2}{-x^2-5x-24}\right| > 2$.

13. Ar ekvivalenčios nelygybės:

a) $x^3 > -27$ ir $x > -3$;

b) $x^2 < 4$ ir $x < 2$;

c) $\frac{x^2+1}{x} > \frac{x-2}{x}$ ir $x^2 + 1 > x - 2$;

d) $\frac{x-1}{x-2} > 0$ ir $(x-1)(x-2) > 0$?

14. Išspręskite nelygybių sistemą:

a) $\begin{cases} \frac{2x-1}{3-x} < 3, \\ x^2 - 5x + 4 \leqslant 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x+1}{x-5} > -2, \\ x^2 - x - 2 \geqslant 0. \end{cases}$

15. Išspręskite lygčių su vienu nežinomuoju sistemą:

a) $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0, \\ x^2 + 3x - 4 = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x^2 - 9)(x^2 - 5x + 6) = 0, \\ (x + 3)(x^2 + 2x - 3) = 0. \end{cases}$

16. Išspręskite lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą:

a) $\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 48; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x - xy + y = 1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{34}{15}, \\ x^2 + y^2 = 34; \end{cases}$

d) $\begin{cases} |x - 1| + |y - 5| = 1, \\ y = 5 + |x - 1|. \end{cases}$

17. Tvenkinio vanduo gali būti išsiurbtas trimis siurbliais. Jei kartu dirbtų pirmas ir antras siurblys, tai tvenkinys būtų ištuštintas per 2 h. Jeigu kartu dirbtų pirmas ir trečias, tai tvenkinys ištuštėtų per 72 min, o jeigu antras ir trečias — per 1,5 h. Per kiek valandų tvenkinį ištuštintų trečiasis siurblys?

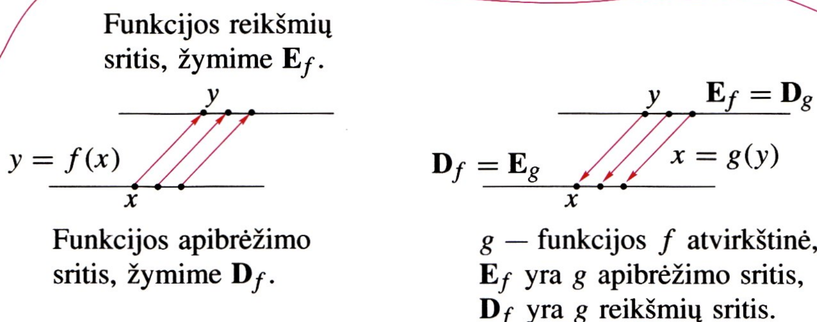
18. Darbininkas pagal planą turi pagaminti 48 detales. Kadangi jis kiekvieną dieną pagamindavo dviem detalėm mažiau negu buvo numatyta pagal planą, tai visą darbą darbininkas baigė dviem dienom vėliau negu planuota. Po kiek detalių kasdien turėjo pagaminti darbininkas pagal planą?

19. Garlaivis, upe pasroviui nuplaukęs 10 km ir prieš srovę 8 km, kelionėje užtruko 3 h. Koks garlaivio greitis prieš srovę ir pasroviui, jeigu upės tėkmės greitis 3 km/h?

20. Sumaišius du druskos rūgšties tirpalus, kurių vieno koncentracija 30%, kito — 10%, buvo gauta 15% koncentracijos 600 g tirpalas. Po kiek gramų kiekvieno tirpalo buvo sumaišyta?

3. Funkcijos sąvoka

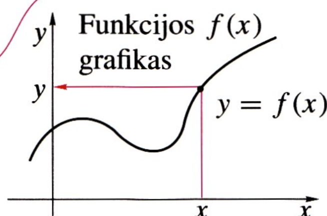
Funkcija — tai taisyklė, priskirianti nepriklausomojo kintamojo reikšmėms priklausomojo kintamojo reikšmes.

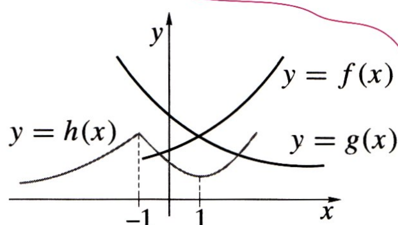


Funkcijos apibrėžimo sritis, žymime $\mathbf{D}_f$.

g — funkcijos f atvirkštinė, $\mathbf{E}_f$ yra g apibrėžimo sritis, $\mathbf{D}_f$ yra g reikšmių sritis.

Kai funkcija f skirtingoms x reikšmėms priskiria skirtingas y reikšmes, galime nagrinėti funkcijos atvirkštinę.





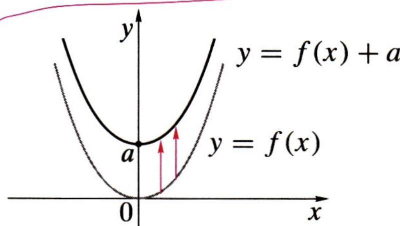
Funkcijos savybes patogu nagrinėti pasitelkus grafiką.

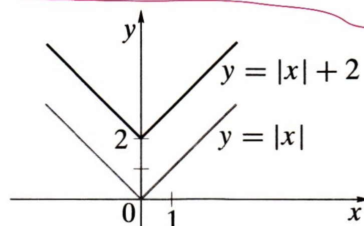
Funkcija $y = f(x)$ yra didėjanti, $y = g(x)$ — mažėjanti. Funkcija $y = h(x)$ yra didėjanti atviruosiuose intervaluose $(-\infty; -1)$ ir $(1; +\infty)$, mažėjanti atvirame intervale $(-1; 1)$.

Dažniausiai funkcijos grafiką braižome pasirinkę kelias nepriklausomojo kintamojo reikšmes, apskaičiavę atitinkamas priklausomojo kintamojo reikšmes, atidėję kelis grafiko taškus ir juos sujungę.

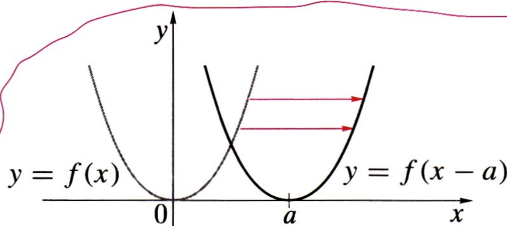
Kartais naujų funkcijų grafikus galime nubraižyti pasinaudoję jau nubraižytais grafikais.

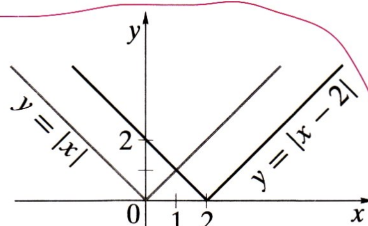
Pavyzdžiui, nusibraižę funkcijos $f(x) = x^2$ grafiką ir jį „pastūmę“ į viršų per 1 ilgio vienetą, gausime funkcijos $f(x) = x^2 + 1$ grafiką.



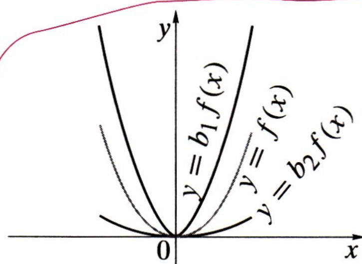


Funkcijos $y = f(x) + a$ grafiką gauname pastūmę aukštyn (arba nuleidę žemyn) funkcijos $y = f(x)$ grafiką.



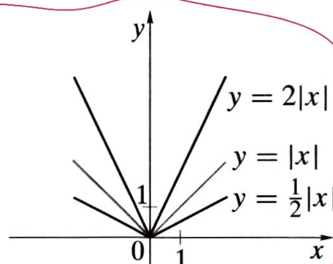


Funkcijos $y = f(x - a)$ grafiką gauname pastūmę $y = f(x)$ grafiką į dešinę, kai $a > 0$, ir pastūmę į kairę, kai $a < 0$.

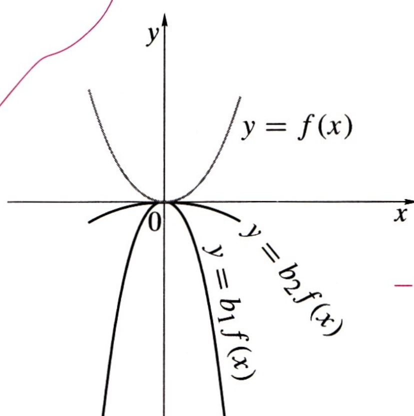


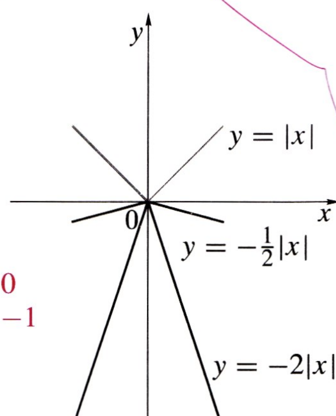
$b_1 > 1$

$0 < b_2 < 1$



Funkcijos $y = bf(x)$ $(b > 0)$ grafiką gauname iš funkcijos $y = f(x)$ grafiko jį ištempę, kai $b > 1$, jį suspaudę, kai $0 < b < 1$.





Kai $b < 0$, tai norint iš funkcijos $y = f(x)$ grafiko gauti funkcijos $y = bf(x)$, reikia pirmąjį grafiką ne tik ištempti ar suspausti, bet ir atvaizduoti jį simetriškai Ox ašies atžvilgiu.

Taigi funkcijos $y = bf(x - a)$ grafiką visada galime gauti atitinkamai transformavę funkcijos $y = f(x)$ grafiką.

Pratimai ir uždaviniai

1. Įrodykite, kad funkcija $f(x) = x(x-2)(x+2) - (x+2)(x^2 - 2x + 4) + 4x$ visoms nepriklausomojo kintamojo x reikšmėms priskiria tą pačią priklausomojo kintamojo y reikšmę.

2. Su kuriomis x reikšmėmis funkcijos:
a) $f(x) = 2x - 5$ grafikas yra aukščiau funkcijos $g(x) = 3 - 8x$ grafiko;
b) $f(x) = 4x - 7$ grafikas yra žemiau funkcijos $g(x) = 5 - 7x$ grafiko?

3. Su kuriomis x reikšmėmis abi funkcijos:
a) $y_1 = x + 6$ ir $y_2 = 2 - 4x$ įgyja teigiamas reikšmes;
b) $y_1 = 2x - 3$ ir $y_2 = 3 - 4x$ įgyja neigiamas reikšmes?

4. Duota funkcija $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Įrodykite, kad funkcijos:
a) $h(x) = x - 3$ grafikas liečia funkcijos $f(x)$ grafiką;
b) $g(x) = 3x - 1$ grafikas kerta funkcijos $f(x)$ grafiką;
c) $m(x) = x - 6$ grafikas neturi bendrų taškų su funkcijos $f(x)$ grafiku.
Užrašykite lietimosi taško ir susikirtimo taškų koordinates. Nubraižykite funkcijų $f(x)$, $h(x)$, $g(x)$ ir $m(x)$ grafikus viename brėžinyje.

5. Raskite funkcijos apibrėžimo sritį:

a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$;   b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$;

c) $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x-2}$;   d) $f(x) = \frac{x^2-7|x|+10}{-x^2+6x-9}$;

e) $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+1}} + \sqrt{5-x}$;   f) $f(x) = \sqrt{(5-x)\sqrt{x-3}}$;

g) $f(x) = \sqrt{(x-2)\sqrt{x+1}}$;   h) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{3-x}} + \frac{1}{\sqrt{x-2}}$.

6. a) Kurie iš skaičių -1; 0; 6; 12; 18 priklauso funkcijos $f(x) = 2x^2 - 5x + 8$ reikšmių sričiai?

b) Kurie iš skaičių -5; 0; 5; 10; $\sqrt{89}$ priklauso funkcijos $f(x) = \sqrt{x^2 + 12x + 99}$ reikšmių sričiai?

7. Raskite funkcijos reikšmių sritį:

a) $f(x) = x^2 - x - 6$;   b) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$;

c) $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$;   d) $f(x) = -4x^2 - x + 3$.

8. Raskite funkcijos $h(x)$ atvirkštinę funkciją ir nubraižykite duotosios ir jai atvirkštinės funkcijų grafikus:

a) $h(x) = 4 - \frac{1}{2}x$;   b) $h(x) = x^2 + 4$ $(x \leqslant 0)$;

c) $h(x) = \sqrt{2x-3}$ $(x > \frac{3}{2})$;   d) $h(x) = \frac{3}{x+2}$.

9. Pasirinkite teisingą atsakymą.

a) Funkcijos $f(x) = x^3 - 2x^2 + 9x$ grafikas ir abscisių ašis:

b) Funkcijos $g(x) = x^3 + 3x^2 - 2x$ grafikas ir abscisių ašis:

A liečiasi   **B** kertasi 1 taške   **C** kertasi 2 taškuose   **D** kertasi 3 taškuose
E bendrų taškų neturi

10. Nubraižykite funkcijų $f(x) = 2x^2 - x - 1$, $g(x) = x^2 + 6x + 8$ ir $h(x) = -x^2 + 4x + 5$ grafikus.

a) Nurodykite šių funkcijų apibrėžimo ir reikšmių sritis;

b) Raskite šių funkcijų minimumo ar maksimumo taškus ir funkcijos reikšmes šiuose taškuose.

c) Užrašykite kiekvienos iš šių funkcijų grafiko simetrijos ašies lygtį.

d) Nustatykite funkcijų pastovaus ženklo intervalus.

11. Raskite atstumą nuo tiesių $3x - y = 5$ ir $2x + y = 10$ susikirtimo taško iki koordinačių ašių bei koordinačių pradžios taško. Nubraižykite brėžinį.

12. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką, jei:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{kai } x < 1, \\ x^2 - 2, & \text{kai } x \geqslant 1; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & \text{kai } x \leqslant -1, \\ 4-x, & \text{kai } x > -1. \end{cases}$

13. Nustatykite, kada funkcijos $f(x) = 1 - \frac{4}{x-2}$ grafikas yra:

a) aukščiau funkcijos $h(x) = \frac{2}{x-2}$ grafiko;

b) žemiau funkcijos $g(x) = \frac{5+x^2}{x^2-4x+4}$ grafiko.

14. Nustatykite, kada funkcijos $f(x) = \frac{11+x^2}{x^2-6x+9} - 1$ grafikas yra:

a) aukščiau tiesės $y = 2$ grafiko;

b) žemiau funkcijos $h(x) = \frac{2}{x-3}$ grafiko.

15. Nustatykite, kurios iš šių funkcijų yra lyginės, kurios nelyginės:

a) $f(x) = x^6 - 3x^4 + x^2$; b) $f(x) = -2x|x| + 4x^3$;

c) $f(x) = 3x^3 - x^7$; d) $f(x) = -x^2|x| - 3x^6$.

16. Nustatykite funkcijos reikšmių sritį:

a) $f(x) = \frac{x-1-|x-1|}{5|x-1|}$; b) $f(x) = \frac{x-5+|5-x|}{3|x-5|}$.

17. Duota funkcija $g(x) = -|x^2 - 2x|$.

a) Nubraižykite jos grafiką;

b) nustatykite funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalus;

c) įrodykite, kad ši funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.

18. Duota funkcija $f(x) = |x^2 + x|$.

a) Nubraižykite jos grafiką;

b) nustatykite funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalus;

c) įrodykite, kad ši funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.

19. Duota funkcija $f(x) = \frac{x+4}{x}$.

a) Nustatykite funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis;

b) įrodykite, kad ši funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė;

c) nubraižykite šios funkcijos grafiką;

d) nagrinėdami grafikus nustatykite, kiek sprendinių turi lygtis $f(x) = -x^2+6$;

e) grafiškai išspręskite nelygybę $f(x) \geqslant 5$.

20. Duotos funkcijos $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ ir $g(x) = 3x^3$.

a) Palyginkite funkcijų reikšmes:
$f(-2)$ ir $f(3)$; $g(3)$ ir $g(-2)$; $f(1)$ ir $g(-1)$; $g(0)$ ir $f(0)$.

b) Kurios iš funkcijų grafikui priklauso duotieji taškai: $A\left(\frac{1}{3}; 1\right)$; $B(0; 0)$; $C(-1; -3)$; $D(6; 36)$; $E\left(\frac{1}{3}; 3\right)$; $G(-2; -24)$; $H(-3; -9)$?

c) Įrodykite, kad abi funkcijos yra nelyginės.

d) Nubraižykite duotųjų funkcijų grafikus.

e) Raskite duotųjų funkcijų atvirkštines funkcijas.

21. Duota funkcija $h(x) = \frac{1+x}{x}$.

a) Raskite funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis.

b) Įrodykite, kad ši funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.

c) Nubraižykite šios funkcijos grafiką.

d) Nagrinėdami grafikus nustatykite, kiek sprendinių turi lygtis $h(x) = x^2 - 2x + 1$.

e) Grafiškai išspręskite nelygybę $h(x) \leqslant 2$.

22. Duota funkcija $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

a) Nustatykite funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis.

b) Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką.

c) Nurodykite intervalą, kuriame $f(x) > 0$.

d) Nurodykite funkcijos monotoniškumo intervalus.

e) Nubraižykite funkcijos $y = |f(x)|$ grafiką.

23. Duota funkcija $g(x) = -x^2 - x + 12$.

a) Nustatykite funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis.

b) Nubraižykite funkcijos $y = g(x)$ grafiką.

c) Nurodykite intervalą, kuriame $g(x) \leqslant 0$.

d) Nurodykite funkcijos monotoniškumo intervalus.

e) Nubraižykite funkcijos $y = |g(x)|$ grafiką.

24. Išspręskite lygtį:

a) $[x - 2] = 1$; b) $\{x\} = 1$;

c) $\{3x - 5\} = 0$; d) $[x - 1{,}5] = 0$.

25. Palyginkite:

a) $\{x + 1\}$ ir $\{x + 3\}$; b) $\{x - 10\}$ ir $\{x + 5\}$;

c) $[x + 1]$ ir $[x + 3]$; d) $[x + 5]$ ir $[x - 5]$.

26. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką, jei:

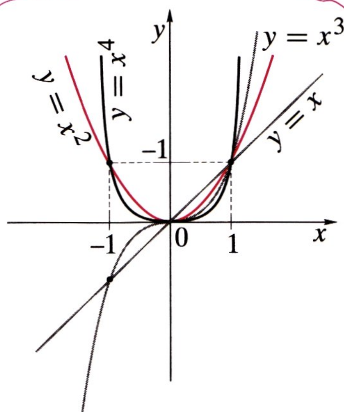
a) $f(x) = [x] + \{x\}$; b) $f(x) = [\{x\}]$.

27. Mokiniai ruošė padėkos raštus varžybų nugalėtojams. Tekstas puslapyje turėjo užimti $320\,\text{cm}^2$. Lapo kraštų papuošimui buvo nuspręsta palikti po 5 cm iš viršaus ir apačios, ir po 4 cm iš kairės ir iš dešinės pusių. Įrodykite, kad rašant tekstą x ilgio eilutėmis prireiks lapo, kurio plotas yra $S(x) = \frac{10}{x}(x^2+40x+256)$.

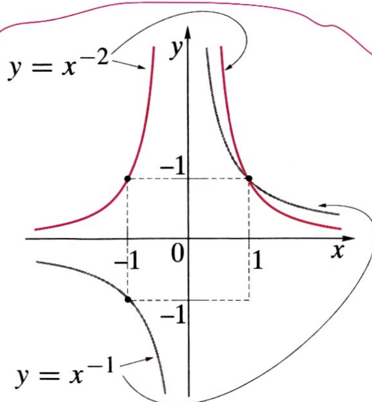
28. 20 m vielos gabalas padalytas į dvi dalis. Iš vienos dalies išlankstytas lygiakraštis trikampis, o iš likusios dalies — kvadratas. Pažymėkime pirmosios dalies ilgį x. Įrodykite, kad trikampio ir kvadrato plotų suma yra $S(x) = \frac{4\sqrt{3}+9}{144}x^2 - \frac{5}{2}x + 25$.

29. 30 m vielos gabalas padalytas į dvi dalis. Iš vienos dalies išlenktas apskritimas, o iš likusios dalies — kvadratas. Pažymėkime pirmosios dalies ilgį x. Įrodykite, kad skritulio ir kvadrato plotų suma yra $S(x) = \frac{4+\pi}{16\pi}x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{225}{4}$.

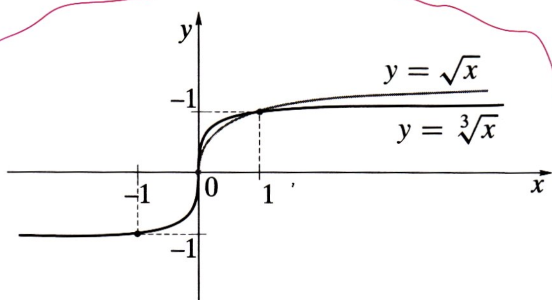
4. Laipsninė funkcija



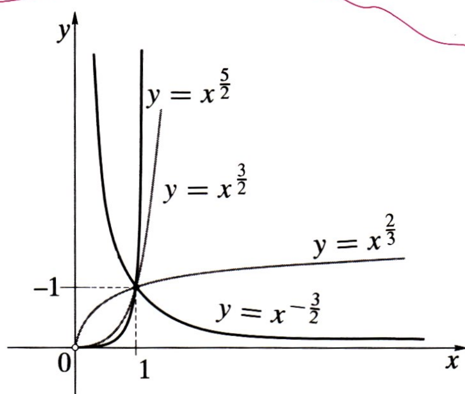
Laipsninės funkcijos $f(x) = x^n$ su natūraliaisiais laipsnio rodikliais yra apibrėžtos visoje realiųjų skaičių aibėje.
Kai n lyginis, $f(x)$ yra lyginė;
kai n nelyginis, $f(x)$ — nelyginė.



Laipsninės funkcijos $f(x) = x^n$ su sveikaisiais neigiamais laipsnio rodikliais apibrėžtos su visais x, $x \neq 0$.
Kai n lyginis, $f(x)$ yra lyginė;
kai n nelyginis, $f(x)$ — nelyginė.



Kai n lyginis, funkcija $f(x) = \sqrt[n]{x}$ apibrėžta tik su neneigiamais x; kai n nelyginis — su visais x.



Teigiamų skaičių aibėje galime apibrėžti visas funkcijas $f(x) = x^n$ su racionaliaisiais (taip pat ir su iracionaliaisiais) laipsnio rodikliais r. Kiekviena funkcija $f(x) = x^r$ $(r \neq 0)$ turi atvirkštinę $g(x)$, kuri irgi yra laipsninė funkcija, $g(x) = x^{\frac{1}{r}}$.

Pratimai ir uždaviniai

Pasirinkite teisingus atsakymus į 1–6 uždavinių klausimus.

1. Tegu $f(x) = x^{-2}$, $g(x) = x^2$. Tada reiškinio $f(\sqrt{7}) - g(\sqrt{14})$ reikšmė yra
A 21 **B** -7 **C** $13\frac{1}{7}$ **D** $14\frac{1}{3}$ **E** $-13\frac{6}{7}$

2. Tegu $f(x) = \frac{1}{x}$. Apskaičiavę $f(x)$ su $x = \frac{3}{4} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ gausime
A $\frac{9}{4}$ **B** $\frac{4}{3}$ **C** $-\frac{4}{3}$ **D** $\frac{1}{12}$ **E** $\frac{3}{4}$

3. Funkcijos $f(x) = \sqrt{x - |x|}$ apibrėžimo sritis yra
A $\varnothing$ **B** sudaryta tik iš skaičiaus 0 **C** $(0; +\infty)$ **D** $[0; +\infty)$
E $(-\infty; 0]$

4. Tegu $f(x) = \sqrt{x}$. Tada $f\big((3-\pi)^2\big)$ reikšmė yra
A $3 - \pi$ **B** $\pm(3 - \pi)$ **C** $3 + \pi$ **D** $\pi - 3$ **E** $-3 - \pi$

5. Tegu $f(x) = \sqrt{x}$. Apskaičiavę $f\big((f(2) - 2)^2\big) + f(2)$ gausime:
A $2 - 2\sqrt{2}$ **B** -2 **C** 2 **D** $2\sqrt{3} - 3$ **E** $4\sqrt{2}$

6. Tegu $f(x) = \sqrt{x}$. Reiškinio $\frac{f\left((f(3)+2)^2-8f(3)\right)}{f(3)-2}$ reikšmė yra:
A 2 **B** -1 **C** $\sqrt{3} - 2$ **D** $2 - \sqrt{3}$ **E** 1

7. Su kuriomis x reikšmėmis teisinga lygybė:

a) $x^{-\frac{4}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x$; b) $x^{\frac{9}{7}} \cdot x^{-\frac{2}{7}} = x^{-2}$?

8. Vienas lygties $ax^4 - 7x^2 + 2 = 0$ sprendinys yra $\sqrt{2}$. Raskite a reikšmę ir išspręskite lygtį.

9. Ar šių funkcijų grafikai kerta Ox ašį:

a) $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}$; b) $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{5-x} - 17$;

c) $f(x) = \sqrt{x-4} - \sqrt{21-x} - 3$; d) $f(x) = \sqrt{x-5} - 10 + \sqrt{3-x}$?

10. Išspręskite lygtį:

a) $(x+1)\sqrt{x^2 - x - 6} = 6x + 6$; b) $(2-x)\sqrt{x^2 - x - 20} = 12 - 6x$;

c) $\sqrt{x^2 - 5x + 6}\,(x^2 - 2x - 1) = 0$; d) $(x^2 + 2x - 4)\sqrt{x^2 + 7x + 10} = 0$.

11. Raskite funkcijos apibrėžimo sritį:

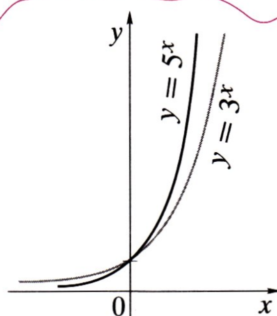
a) $f(x) = \frac{x}{x+2} + \sqrt{16 - x^2}$; b) $f(x) = \sqrt[6]{\frac{x^2+3x-4}{-100+20x-x^2}}$;

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 10x} - \frac{x+1}{x}$; d) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2-4x+4}{x^2-6x-7}}$;

e) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^6}{3x^2+7x+5}}$; f) $f(x) = \sqrt[5]{\frac{x^2}{5-3x-2x^2}}$.

5. Rodiklinė funkcija

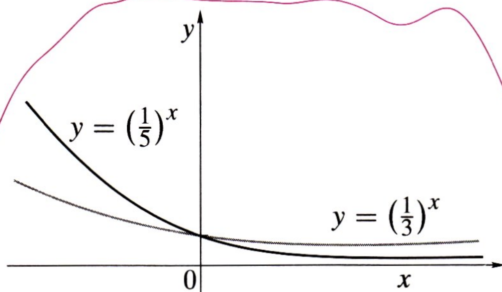
Funkciją $f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ vadiname rodikline. Ji apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje.



Kai $a > 1$, tai funkcija $f(x) = a^x$ yra didėjanti. Taigi nelygybės

$$5^x > 5^2$$

sprendiniai yra visi $x > 2$.



Kai $0 < a < 1$, tai funkcija $f(x) = a^x$ yra mažėjanti. Taigi nelygybės

$$\left(\tfrac{1}{5}\right)^x > \left(\tfrac{1}{5}\right)^2$$

sprendiniai yra visi $x < 2$.

Pratimai ir uždaviniai

1. Nustatykite, kurios iš funkcijų yra didėjančios, kurios mažėjančios:

a) $f(x) = (1{,}3)^{-3x}$; b) $f(x) = (2{,}7)^{1{,}5x}$;

c) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{1{,}2x}$; d) $f(x) = (0{,}5)^{3x}$;

e) $f(x) = (0{,}6)^{-2x}$; f) $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{4}x}$.

2. Raskite funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritį, jei:

a) $f(x) = 2^{\sqrt{x^2-3}}$;

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5-x^2}}$;

c) $f(x) = \sqrt{1\frac{1}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{x^2-8x+5}}$;

d) $f(x) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^{x^2-9x+12} - 8\frac{1}{3}}$.

3. Raskite funkcijos $y = f(x)$ reikšmių sritį, jei:

a) $f(x) = 3^{1-x^2}$; b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+x^2}$;

c) $f(x) = 2^{|x|-1}$; d) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|+1}$.

4. Raskite funkcijos $y = f(x)$ didžiausią reikšmę, jei:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$; b) $f(x) = 3^{4x-x^2}$.

5. Kuriame taške funkcijos $y = f(x)$ grafikas kerta abscisių ašį, jei:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x} - \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} - 128$;

b) $f(x) = 2^{\sqrt{x-6}+x} - (0{,}25)^{-4}$;

c) $f(x) = 4^{2x-1} - 2{,}5 \cdot 4^x + 4$;

d) $f(x) = 9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3$;

e) $f(x) = 2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1}$;

f) $f(x) = 4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x - 5 \cdot 6^{\frac{x}{2}}$.

6. Išspręskite lygtį:

a) $5^x - 3 \cdot 5^{x-1} - 2 \cdot 5^{x-2} = 40$; b) $2^{x+3} + 2^{x+1} = 80$;

c) $5^{x+1} + 5^{x-1} - 5^x = 105$; d) $\frac{2^{x+1}}{0{,}25} = 32 + 2^{x+2}$;

e) $2 \cdot 9^{2x} - 6^{2x} - 3 \cdot 4^{2x} = 0$; f) $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$.

7. Raskite lygties sprendinių sumą:

a) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\frac{5}{3}\right)^9$;

b) $(0{,}2)^{x^2-16x+37{,}5} = 5\sqrt{5}$;

c) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$;

d) $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

8. Su kuriomis x reikšmėmis teisinga nelygybė $f(x) < 1$, jei:

a) $f(x) = 5^{\frac{x^2-3x+2}{x-5}}$;

b) $f(x) = (0{,}4)^{\frac{x^2-7x+10}{x-3}}$;

c) $f(x) = 10^{\frac{x^2-6x+8}{x^2-9x+20}}$;

d) $f(x) = (0{,}3)^{\frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}}$;

e) $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{x^2-9x+12} - \frac{1}{3}$;

f) $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^{x^2-10x+7} - 7\frac{1}{3}$.

9. Išspręskite nelygybę:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+4x} \geqslant \left(\frac{8}{27}\right)^{x+2}$;

b) $3^{\frac{6x-3}{3}} < 27^{\frac{2x-1}{3x}}$;

c) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2-6x+3} < 0{,}8$;

d) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{x^2-8x+5} > 1\frac{1}{3}$;

e) $5^{2x+1} - 5^{x+2} \leqslant 5^{x+1} - 25$;

f) $9^x - 3^{x+2} > 3^x - 9$.

10. Duota funkcija $f(x) = 3^x$.

a) Raskite didžiausią ir mažiausią funkcijos reikšmes intervale $[-1; 3]$.

b) Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} f(x) = y, \\ y^2 - 81 = 0. \end{cases}$$

c) Raskite lygties

$$(f(x) - 1)(f(x) - 9)(f(x) - 81) = 0$$

sprendinius, priklausančius intervalui $[-1; 3]$.

d) Raskite visas m reikšmes, su kuriomis lygtis

$$f(x) = 81 - m^2$$

neturi sprendinių.

6. Logaritminė funkcija

Skaičiaus logaritmas duotuoju pagrindu — tai rodiklis laipsnio, kuriuo reikia kelti pagrindą, kad gautume skaičių.
Kadangi $5^2 = 25$, tai $\log_5 25 = 2$; kadangi $5^{-3} = \frac{1}{125}$, tai $\log_5 \frac{1}{125} = -3$; kadangi $5^0 = 1$, tai $\log_5 1 = 0$.
Logaritmo pagrindas a turi būti teigiamas, nelygus 1 skaičius ($a > 0$; $a \neq 1$); apibrėžti tik teigiamų skaičių logaritmai.
Skaičiuodami logaritmus ar pertvarkydami reiškinius su logaritmais naudojamės logaritmų savybėmis:

$$a^{\log_a b} = b \quad \text{(pagrindinė logaritmų tapatybė)};$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y;$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y;$$

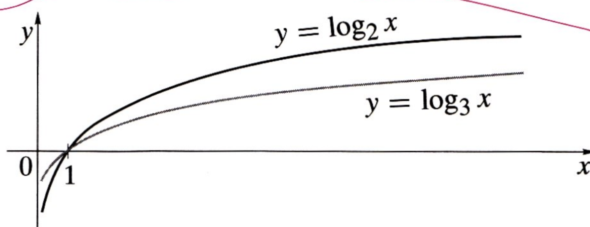
$$\log_a x^k = k \log_a x;$$

$$\log_{a^k} x^k = \log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a};$$

visose lygybėse $a > 0$, $a \neq 1$; $b > 0$, $b \neq 1$; $x > 0$, $y > 0$.

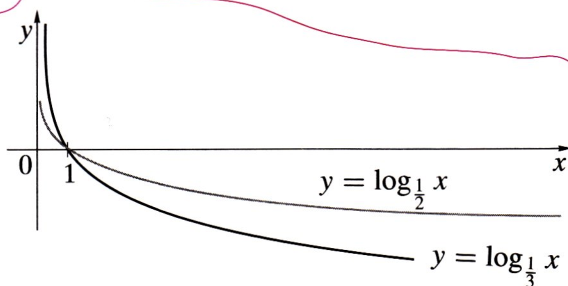
Funkciją $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) vadiname logaritmine. Ji apibrėžta tik su teigiamais x. Logaritminė funkcija $f(x) = \log_a x$ yra rodiklinės funkcijos $g(x) = a^x$ atvirkštinė.



Kai $a > 1$, tai funkcija $f(x) = \log_a x$ yra didėjanti. Taigi nelygybės

$$\log_2 x < \log_2 5$$

sprendiniai yra $0 < x < 5$.



Kai $0 < a < 1$, tai funkcija $f(x) = \log_a x$ yra mažėjanti. Taigi nelygybės

$$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 5$$

sprendiniai yra $x > 5$.

Pratimai ir uždaviniai

1. Apskaičiuokite:

a) $\log_{13}(-13)^2 - \log_{13}^{13} 13$;

b) $\log_{\sqrt{\sqrt{2}}} \sqrt{2} + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{2}}$;

c) $\log_{2000} \sqrt{2000} + \log_{\sqrt{2000}} 2000$;

d) $\log_2 2 + \log_3 3 + \log_4 4 + \cdots + \log_{2000} 2000$;

e) $2\log_2 6 + \log_2 \frac{35}{9} - \log_2 35$;

f) $\log_3 72 - \log_3 \frac{16}{27} + \log_3 18$;

g) $\log_4 \frac{1}{4} + \log_4 36 + \frac{1}{2}\log_4 \frac{16}{81}$;

h) $\log_5 \frac{1}{4} - 2\log_5 \frac{5}{3} + \log_5 \frac{4}{9}$.

2. Palyginkite reiškinių reikšmes:

a) $\lg \sqrt{3}$ ir $\lg 2$;

b) $\lg \frac{3}{11}$ ir $\lg \frac{2}{3}$;

c) $\lg \sqrt[3]{30}$ ir $\lg 3$;

d) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ ir $\log_2 \frac{1}{2}$;

e) $\log_{0,1} 4$ ir $\log_{0,1} \sqrt{15}$;

f) $\log_{0,3} \frac{1}{3}$ ir $\log_{0,3} \sqrt{0,3}$.

3. Pasirinkite teisingą atsakymą:

1) Reiškinio $0{,}01^{\lg \frac{1}{3}}$ reikšmė lygi:
A $\frac{1}{3}$ **B** $\frac{1}{9}$ **C** 3 **D** 9 **E** 30

2) Reiškinio $\sqrt{-3\lg 0{,}001}$ reikšmė lygi:
A -3 **B** 3 **C** 1 **D** $\frac{1}{3}$ **E** 9

3) Skaičių $-\lg 9$ ir $\frac{1}{\lg\sqrt{3}}$ sandauga lygi:

A 4 **B** 1 **C** −4 **D** −1 **E** 3

4) Funkcijos $f(x) = \sqrt{x+4}\lg x$ grafikas kerta Ox ašį taškuose:

A −4 ir 1 **B** 1 **C** −4 **D** 0 ir −4 **E** 10 ir −4

5) Reiškinio $\frac{\log_2 216}{\log_2 6}$ reikšmė lygi:

A 36 **B** 72 **C** $\log_2 36$ **D** 3 **E** 6

6) Reiškinio $\lg(0{,}01\sqrt{10})$ reikšmė lygi:

A $-\frac{3}{2}$ **B** $-\frac{1}{3}$ **C** $\frac{3}{2}$ **D** −3 **E** $1\frac{1}{3}$

4. Raskite funkcijos apibrėžimo sritį:

a) $y = \frac{\sqrt{7-x}}{\lg(x-1)}$; b) $y = \frac{1}{\sqrt{3-x}\cdot\lg(x+1)}$;

c) $y = \frac{\sqrt{10-x}}{(x-5)\lg(x-1)}$; d) $y = \frac{\sqrt{9-x}}{(x-3)\lg(x+1)}$;

e) $y = \sqrt{\log_4 \frac{2x-1}{x+1}}$; f) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}} \frac{3x-1}{x+3}}$.

5. Su kuriomis x reikšmėmis yra teisinga lygybė:

a) $\lg(x+2) + \lg 2 - 1 = \frac{1}{2}\lg(x-4)$;

b) $\lg(x-6) - \lg\sqrt{2} = \lg 3 + \frac{1}{2}\lg(x-10)$;

c) $\frac{1}{5-\lg x} - 6 = \frac{1-6\lg x}{\lg x}$;

d) $1 + \lg 1 - \frac{1}{5-\lg x} = \frac{2}{1+\lg x}$?

6. Su kuria x reikšme funkcijos $y = f(x)$ reikšmė lygi 2, jei:

a) $f(x) = \log_x(2x^2 - 9)$; b) $f(x) = \log_x(2x^2 - 3x + 2)$;

c) $f(x) = \log_{x-1}(x^2 - 5x + 10)$; d) $f(x) = \log_3(3^x - 8) + x$?

7. Kuriuose taškuose funkcijos $y = g(x)$ grafikas kerta abscisių ašį, jei:

a) $g(x) = \lg\left(81\sqrt[3]{3^{x^2-8x}}\right)$;

b) $g(x) = \sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}} - 10$;

c) $g(x) = \lg(5-x) - \frac{1}{3}\lg(35 - x^3)$;

d) $g(x) = \lg(\lg x) + \lg(\lg x^4 - 3)$?

8. Išspręskite lygtį:

a) $0{,}5\log_3^2 x = 4 - \log_3 x$; b) $10\log_2^2 x = \log_2 x^3 + 1$;

c) $4^{\log_2 x} - 3\cdot 2^{\log_2 x} + 2 = 0$; d) $9^{\log_3 x} - 4\cdot 3^{\log_3 x} + 3 = 0$;

e) $3^{2\lg x}\cdot 2^{3\lg x} = 72$; f) $\frac{1}{27}\cdot 2^{\lg x} = \frac{1}{8}\cdot 3^{\lg x}$.

9. Išspręskite lygtį:

a) $\log_5(\log_5 x) = 1$;

b) $\log_4\Big(2\log_3\big(1+\log_2(1+3\log_2 x)\big)\Big) = \frac{1}{2}$;

c) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$;

d) $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$.

10. Išspręskite lygtį:

a) $x^{1+\lg x} = 0{,}1^{-2}$;

b) $x^{\lg x} = 100x$;

c) $x^{\lg x - 4} = 0{,}001$;

d) $0{,}1x^{\lg x + 1} = 10$.

11. Su kuria x reikšme $f(x) = 0$, jei:

a) $f(x) = 3^{\lg x + 1} + 2\cdot 3^{\lg x} - 15$;

b) $f(x) = (0{,}5)^{-\lg x - 6} - 2^{\lg x + 3} - 28$;

c) $3^{2\lg x + 3} - 7\cdot 3^{2\lg x + 1} - 54 = 0$;

d) $9^{-\log_3 x} - 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 x} + 3$?

12. Raskite lygties sprendinių sandaugą:

a) $(\log_5 x - 1)\log_5\sqrt{x} = \log_5 5$;

b) $\lg(x^2+1) = 2\lg^{-1}(x^2+1) - 1$;

c) $9^{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)} = 5^{\log_{\frac{1}{5}}(2x^2+1)}$;

d) $\lg^2(100x) + \lg^2(10x) + \lg x = 14$.

13. Įrodykite, kad lygtis neturi sprendinių:

a) $\lg(10-3x^2) = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+2}$;   b) $\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x} = \lg(4x^2 - 100)$.

14. Raskite lygčių sistemos sprendinius:

a) $\begin{cases} x - y = 90, \\ \lg x + \lg y = 3; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 4, \\ x^{\lg y} = 1000; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log_y x - 3\log_x y = 2, \\ \log_2 x = 4 - \log_2 y; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_4 x + \log_{16} y = 1{,}5, \\ \log_4 x^2 + 2\log_2 y = 3. \end{cases}$

15. Išspręskite nelygybę:

a) $\log_5(3-8x) > 0$;

b) $\log_{\frac{1}{2}}(7-3x) \geqslant 0$;

c) $\log_{\frac{1}{3}}(7-x) > -2$;

d) $\log_2(x-3) \leqslant 3$;

e) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6) > -1$;

f) $\log_{0,5}(3x^2) > \log_{0,5} 2 + \log_{0,5}(4-x)$.

16. Su kuriomis x reikšmėmis funkcijos $y = f(x)$ reikšmės yra teigiamos, jei:

a) $f(x) = 2^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x-1}} - \frac{1}{2}$;

b) $f(x) = 3^{\log_5 \frac{2x+1}{x-1}} - \frac{1}{3}$;

c) $f(x) = 0{,}8^{\log_4 \frac{4x-3}{2x-1}} - 2\sqrt{0{,}2}$;

d) $f(x) = 0{,}4^{\log_9 \frac{3x-2}{x+2}} - \sqrt{\frac{2}{5}}$;

e) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9$;

f) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \left(\log_4(x^2 - 5)\right)$?

17. Su kuriomis x reikšmėmis funkcijos $y = f(x)$ grafikas yra žemiau tiesės $y = 4$, jei:

a) $f(x) = 9^{\lg x} + 3^{1-2\lg x}$; b) $f(x) = 10 - 2^{\lg x} - 2^{3-\lg x}$?

18. Duota funkcija $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - 3x - 2)$.

a) Raskite funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritį.

b) Įrodykite, kad $f\left(-\frac{2}{3}\right) = -3 - 2\log_{\frac{1}{2}} 3$.

c) Išspręskite lygtį $f(x) = f(x + 3)$.

d) Išspręskite nelygybę $2^{f(x)} \geqslant 2^{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}$.

e) Su kuriomis x reikšmėmis funkcijos $f(x)$ grafikas yra virš tiesės $y = \log_{\frac{1}{2}} 3$?

19. Duota funkcija $f(x) = \frac{4}{1-\log_2 x} + \frac{1}{1+\log_2 x}$.

1) Raskite funkcijos apibrėžimo sritį.
2) Raskite taškus, kuriuose funkcija kerta abscisių ašį.
3) Nustatykite, kada funkcijos grafikas yra žemiau abscisių ašies.
4) Išspręskite lygtį $f(x) = 5$.

20. Dalis į tinklą patekusių žuvų sugaunamos, dalis jų išsprūsta. Kuo žuvys didesnės, tuo didesnė jų dalis sugaunama. Nustatyta, kad iš į tinklą patekusių visų x cm ilgio žuvų sugaunama dalis procentais pakankamai tiksliai gali būti nusakyta funkcija

$$f(x) = \frac{100}{1 + a\mathrm{e}^{-bx}} \quad (\mathrm{e} \approx 2{,}7...).$$

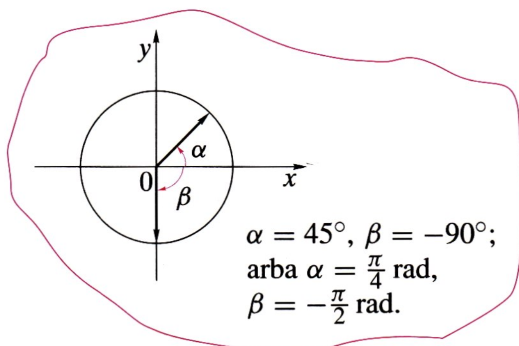
a) Atlikus tyrimus nustatyta, kad 10 cm ilgio žuvų, patekusių į tinklą, sugaunama tik 15%, o 20 cm ilgio — 25%. Pasinaudokite skaičiuokliu ir raskite dydžius a ir b.

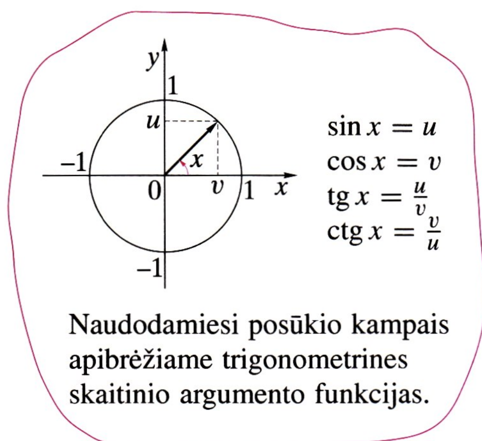
b) Kokio ilgio žuvų, patekusių į tinklą, sugaunama trigubai daugiau, negu 10 cm ilgio žuvų?

c) Kokio ilgio žuvų, patekusių į tinklą, sugaunama daugiau kaip pusė?

7. Trigonometrinės funkcijos

Posūkio kampus matuojame laipsniais ir radianais.





Trigonometrinių funkcijų reikšmės yra tarpusavyje susiję:

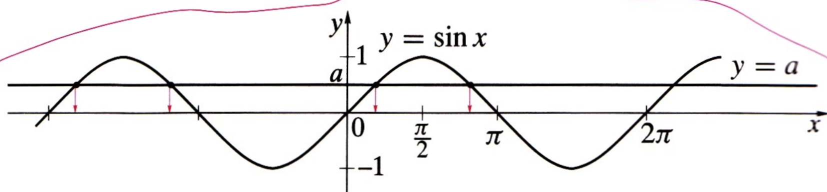
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Naudodamiesi redukcijos taisykle $\sin(n\frac{\pi}{2} \pm x)$ (taip pat ir $\cos(n\frac{\pi}{2} \pm x)$) ($n \in \boldsymbol{Z}$) galime išreikšti dydžio x sinusu arba kosinusu, o $\operatorname{tg}(n\frac{\pi}{2} \pm x)$ (ir $\operatorname{ctg}(n\frac{\pi}{2} \pm x)$) — dydžio x tangentu arba kotangentu. Pavyzdžiui:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x,$$

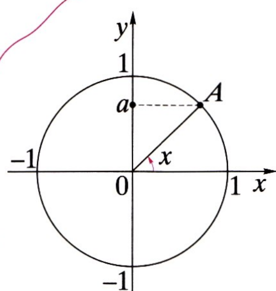
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{ctg} x,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg} x.$$

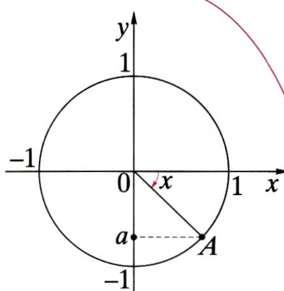


Funkcija $f(x) = \sin x$ yra periodinė su mažiausiu teigiamu periodu $T = 2\pi$.
Kai $|a| > 1$, tai lygtis $\sin x = a$ neturi sprendinių; kai $|a| \leqslant 1$, tai lygtis $\sin x = a$ turi be galo daug sprendinių. Jie užrašomi formule

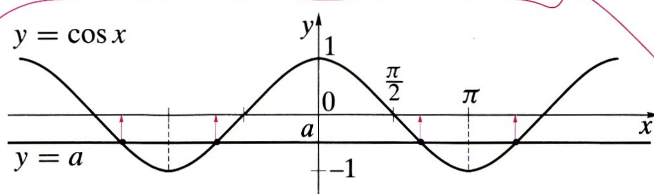
$$x = (-1)^n \arcsin a + n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$



$\sin x = a$,
$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$,
taigi
$x = \arcsin a$.

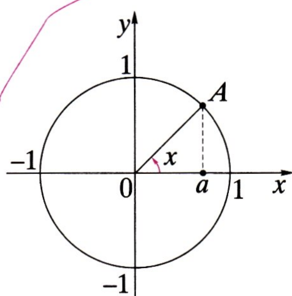


Norėdami rasti $\arcsin a$ $(-1 \leqslant a \leqslant 1)$, ieškome $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, kad būtų $\sin x = a$.
Teisinga lygybė: $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

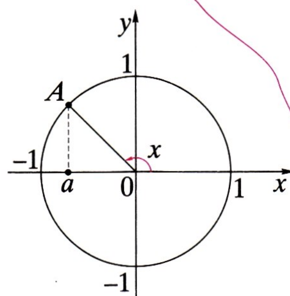


Funkcija $f(x) = \cos x$ yra periodinė su mažiausiu teigiamu periodu $T = 2\pi$.
Kai $|a| > 1$, tai lygtis $\cos x = a$ neturi sprendinių; kai $|a| \leqslant 1$, tai lygtis $\cos x = a$ turi be galo daug sprendinių. Jie užrašomi formule

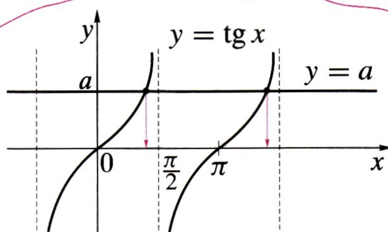
$$x = \pm \arccos a + 2n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$



$\cos x = a$,
$x \in [0; \pi]$,
taigi
$x = \arccos a$.

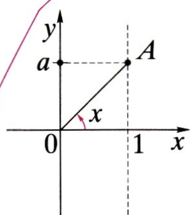


Norėdami rasti $\arccos a$ $(-1 \leqslant a \leqslant 1)$,
ieškome $x \in [0; \pi]$, kad būtų $\cos x = a$.
Teisinga lygybė: $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

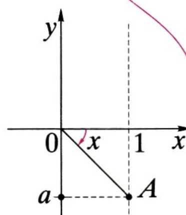


Funkcija $y = \operatorname{tg} x$ yra periodinė su mažiausiu teigiamu periodu $T = \pi$.
Su bet kuria a reikšme lygtis $\operatorname{tg} x = a$ turi be galo daug sprendinių.
Jie užrašomi formule

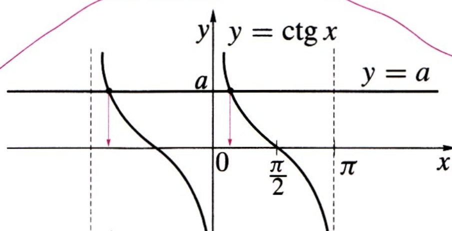
$$x = \operatorname{arctg} a + n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$



$\operatorname{tg} x = a$,
$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,
taigi
$x = \operatorname{arctg} a$.

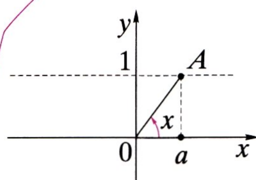


Norėdami rasti $\operatorname{arctg} a$,
ieškome $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, kad būtų $\operatorname{tg} x = a$.
Teisinga lygybė: $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

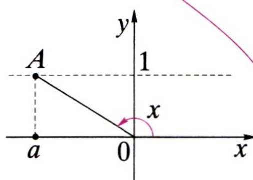


Funkcija $y = \operatorname{ctg} x$ yra periodinė su mažiausiu teigiamu periodu $T = \pi$.
Su bet kuria a reikšme lygtis $\operatorname{ctg} x = a$ turi be galo daug sprendinių.
Jie užrašomi formule

$$x = \operatorname{arcctg} a + n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$



$\operatorname{ctg} x = a$
$x \in (0; \pi)$,
taigi
$x = \operatorname{arcctg} a$.



Norėdami rasti $\operatorname{arcctg} a$,
ieškome $x \in (0; \pi)$, kad būtų $\operatorname{ctg} x = a$.
Teisinga lygybė: $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

Pertvarkyti trigonometrinius reiškinius padeda formulės.
Keletas svarbiausių trigonometrijos formulių:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\cos\beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha), \quad \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha).$$

Pagrindinės trigonometrinių funkcijų reikšmės:

$\alpha =$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha =$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha =$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha =$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	neegzistuoja
$\operatorname{ctg}\alpha =$	neegzistuoja	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Pratimai ir uždaviniai

1. Pasirinkite teisingą atsakymą.

1) Reiškinio $-\sqrt{2}\cos x$ mažiausia reikšmė lygi:
A 0 **B** $-2\sqrt{2}$ **C** $-\sqrt{2}$ **D** $-3\sqrt{2}$ **E** -1

2) Reiškinio $\sin 330° \cdot \cos 120° \cdot \operatorname{tg} 780°$ reikšmė lygi:
A $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C** $-\sqrt{3}$ **D** $\sqrt{3}$ **E** $\frac{\sqrt{3}}{4}$

3) Reiškinio $\sin 495° - \sin 735° + \sin 1095°$ reikšmė lygi:
A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C** 1 **D** -1 **E** $-\frac{1}{2}$

4) Reiškinio $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ reikšmė yra:
A $\sqrt{3}$ **B** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **C** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D** $\varnothing$ **E** Reiškinys neturi prasmės

2. Apskaičiuokite:

a) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, kai $\cos\alpha = -\frac{24}{25}$ ir $\alpha \in (90°; 180°)$;

b) $8\sqrt{5}\sin\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right)$, kai $\sin\beta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ ir $\beta \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$.

3. Raskite funkcijos apibrėžimo sritį:

a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \operatorname{tg} x$;

b) $f(x) = \ln(9 - x^2) + \sqrt{\cos x}$;

c) $f(x) = \frac{3\sqrt{-x}+2\sqrt{x+4}}{\sin x}$;

d) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 11x + 15} + \arcsin(3 - x)$.

4. Raskite funkcijos didžiausią ir mažiausią reikšmę (jei ji egzistuoja):

a) $f(x) = 3\sin x + 5$;

b) $f(x) = |\operatorname{tg} x| - 10$;

c) $f(x) = 2\cos x - \sqrt{3}$;

d) $f(x) = 0{,}8 - 2\sin^2 x$;

e) $f(x) = 3\arcsin(4x + 1)$;

f) $f(x) = 2^{1-\sin^2 x}$.

5. Suprastinkite:

a) $\sin(2x + 4\pi) - 2\sin(x + \pi)\cos(x - \pi)$;

b) $2\sin(2x - \pi)\cos(2x + \pi) + \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(\pi - \alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

d) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}$.

6. Apskaičiuokite:

a) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) - \cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$;

b) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \operatorname{arctg} 0\right)$;

c) $\operatorname{tg}(\arcsin 0) - \operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$;

d) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - \operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$.

7. Suprastinkite:

a) $\frac{\sin(4\alpha)}{1+\cos(4\alpha)} \cdot \frac{\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}$;

b) $1 - \cos\alpha + 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$;

c) $\cos^2(2\alpha) + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

d) $4\sin(15^\circ+\alpha)\cos(15^\circ+\alpha) - \cos(2\alpha)$;

e) $2\cos^2(2\beta) - \cos(4\beta)$;

f) $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \cos(2\alpha) - \sin(2\alpha)$.

8. Įrodykite tapatybes:

a) $\frac{2\sin\alpha - \sin(2\alpha)}{2\sin\alpha + \sin(2\alpha)} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$;

b) $\frac{1-2\cos^2\beta}{\sin\beta\cos\beta} = \operatorname{tg}\beta - \operatorname{ctg}\beta$;

c) $(\sin^2 t + 2\sin t\cos t - \cos^2 t)^2 = 1 - \sin(4t)$;

d) $\frac{1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \cos(2\alpha)$;

e) $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \frac{2}{\cos\alpha}$ $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$;

f) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = -2\operatorname{ctg}\alpha$ $\left(\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi\right)$.

9. Kurios iš šių lygčių neturi sprendinių:

a) $\sin x = x^2 + 3$;

b) $\cos x = x^2 - 3$;

c) $2\sin x = x + 2$;

d) $3\sin x = x - 3$;

e) $\frac{1}{3}\cos x = x - 1$;

f) $\frac{1}{5}\sin x = \frac{1}{x} - 5$?

10. Išspręskite lygtį:

a) $\sin(4x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\cos\left(\frac{1}{3}x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -2$;

d) $\cos(2x) = -2$;

e) $\sin(2x)\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos(2x)\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

f) $\cos\left(\frac{1}{5}x\right)\cos\left(\frac{1}{5}x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{1}{5}x\right)\sin\left(\frac{1}{5}x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$;

g) $4\cos^2\left(\frac{1}{3}x\right) + 10\sin\left(\frac{1}{3}x\right) + 2 = 0$;

h) $\cos^2(3x) - 2{,}5\cos(3x) - 1{,}5 = 0$.

11. Su kuriomis x reikšmėmis funkcijos $y = f(x)$ reikšmės lygios 2, jei:

a) $f(x) = \sin^2(3x) - 3\sin(3x)\cos(3x) + 2\cos^2(3x) + 2$;

b) $f(x) = 2\sin^2\left(\frac{1}{3}x\right) - 3\sin\left(\frac{1}{3}x\right)\cos\left(\frac{1}{3}x\right) + \cos^2\left(\frac{1}{3}x\right) + 2$;

c) $f(x) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2 x + \sin^2\left(\frac{3}{2}x\right) + \sin^2(2x)$;

d) $f(x) = \cos^2(2x) + \cos^2(4x) + \cos^2(6x) + \cos^2(8x)$?

12. Išspręskite lygtį:

a) $3\,\mathrm{tg}(2x) - 2\,\mathrm{ctg}(2x) = 1$;

b) $4\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{4}\right) + 3\,\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{4}\right) = 7$;

c) $\mathrm{tg}^2 x + 7 = \frac{5}{\cos x}$;

d) $\frac{1}{\sin x} = \mathrm{ctg}^2 x - 1$.

13. Su kuriomis x reikšmėmis teisinga lygybė $f(x) = 0$, jei:

a) $f(x) = \sin^2(6x) - \frac{1}{6}\cos(6x) - 1$;

b) $f(x) = 2\cos(2x) - 10\sin x - 6$;

c) $f(x) = 5\,\mathrm{ctg}\left(\frac{2x}{5}\right) - 5$;

d) $f(x) = 9\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{3}\right) - 3$?

14. Su kuriomis x reikšmėmis teisinga lygybė:

a) $\sin(4x)\sin(8x) = \sin(5x)\sin(7x)$;

b) $\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\sin x = \sin\left(\frac{3x}{2}\right)\cos x$;

c) $\cos(2x)\sin(6x) = \cos(4x)\sin(8x)$;

d) $\cos\left(\frac{3}{5}x\right)\cos\left(\frac{2}{5}x\right) = \cos x\cos\left(\frac{6}{5}x\right)$?

15. Išspręskite lygtį:

a) $2\cos(2x) - \sin(2x) - \sin x \cos x = 0$;

b) $\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin(2x) + 9\cos^2 x = 0$;

c) $6\cos^2\left(\frac{x}{3}\right) - 9\sin\left(\frac{x}{3}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right) - 15\sin^2\left(\frac{x}{3}\right) = 0$;

d) $\sqrt{2}\sin(4x)\cos(4x) - \frac{1}{2}\sin^2(4x) + 1 = 0$.

16. Išspręskite lygtį:

a) $1 + \cos(3x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{3x}{2}\right)$;

b) $\left(1 + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$;

c) $\frac{1+\operatorname{ctg}(2x)}{1+\operatorname{tg}(2x)} = \cos(2x)$;

d) $\frac{1+\operatorname{tg}(\frac{x}{3})}{1+\operatorname{ctg}(\frac{x}{3})} + \sin\left(\frac{x}{3}\right) = 0$;

e) $\frac{\sin(4x)}{\sin(2x)} = \frac{\cos(4x)}{\cos(2x)}$;

f) $\frac{1+\cos x}{2\cos(\frac{x}{2})} = \frac{\sin x}{1-\cos x}$.

17. Raskite lygties sprendinius, priklausančius nurodytam intervalui:

a) $\cos(\pi x) = 1$, $x \in (0; 50)$; b) $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$, $x \in (0; 25)$.

18. Raskite nelygybės sprendinius:

a) $2\sin(2x) < \sqrt{3}$;

b) $3\cos(3x) \geqslant -\frac{3}{2}$;

c) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right) < \frac{\sqrt{3}}{3}$;

d) $4\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4}\right) \geqslant -\frac{4}{\sqrt{3}}$;

e) $4\sin(4x)\sin(2x) > 0$;

f) $\frac{1}{2}\sin x\cos\left(\frac{x}{2}\right) < 0$;

g) $2\cos^2(2x) - \sin(2x) > 2$;

h) $\cos(6x) - 5\sin(3x) < 3$.

19. Duota funkcija $f(x) = \sin^2 x - \cos(2x)$.

1) Apskaičiuokite $f(x)$ reikšmę, jei žinoma, kad $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2) Raskite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo ir reikšmių sritis.
3) Išspręskite lygtį $f(x) = -\frac{1}{4}$.
4) Išspręskite nelygybę $f(x) \geqslant \frac{1}{2}$, kai $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
5) Kiek sprendinių turi lygtis $f(x) = 0$, kai $x \in [0; 2\pi]$?

20. Duota funkcija $f(x) = \frac{\sin x - 1}{\sin x}$.

a) Suprastinkite reiškinius $f(\pi - x)$ ir $f(\pi + x)$.

b) Išspręskite lygtį $f(x) = 2$.

c) Palyginkite reiškinių $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ir $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ reikšmes.

d) Raskite m reikšmę, su kuria skaičius $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ yra lygties $f(x) = m$ sprendinys.

8. Sekos

Skaičių seką (a_n) dažniausiai apibrėžiame nurodydami bendrojo nario formulę arba rekurentiškai. Pavyzdžiui, seka (a_n), $a_n = n^2$, apibrėžta bendrojo nario formule, o seka (b_n), $b_1 = 2$, $b_n = b_{n-1}^2$, — rekurentiškai.
Seką (a_n), kurios narių skirtumai $a_n - a_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$ yra pastovūs, vadiname *aritmetine progresija.*
Aritmetinę progresiją (a_n) galime apibrėžti, užrašę pirmojo nario a_1 reikšmę ir rekurentinę lygybę

$$a_n = a_{n-1} + d \quad (n \geqslant 2),$$

čia d — pastovus skaičius, aritmetinės progresijos skirtumas. Aritmetinę progresiją galima apibrėžti ir bendrojo nario formule

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Aritmetinės progresijos n pirmųjų narių sumą S_n galima apskaičiuoti taip:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Seką (b_n) $(b \neq 0)$, kurios narių santykiai $\frac{b_n}{b_{n-1}}$ $(n \geqslant 2)$ yra pastovūs, vadiname *geometrine progresija.*
Geometrinė progresija (b_n) rekurentiškai apibrėžiama, užrašius b_1 reikšmę ir lygybę

$$b_n = b_{n-1}q \quad (n \geqslant 2).$$

Geometrinės progresijos (b_n) bendrojo nario formulė tokia:

$$b_n = b_1 q^{n-1},$$

čia $q \neq 0$ — geometrinės progresijos vardiklis.
Geometrinės progresijos (b_n) n pirmųjų narių sumą S_n galima apskaičiuoti taip:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

jei $|q| < 1$ $(q \neq 0)$, tai geometrinė progresija vadinama nykstamąja. Kai n didėja, nykstamosios progresijos narių sumos S_n artėja prie skaičiaus S,

$$S = b_1 \cdot \frac{1}{1 - q},$$

kuris vadinamas nykstamosios geometrinės progresijos suma.

Pratimai ir uždaviniai

1. Raskite pirmuosius penkis sekos narius ir nustatykite, ar ši seka monotoninė:

a) $a_n = n^2 - 3n + 1$; b) $b_n = 3^{n-3}$; c) $c_n = (-1)^{3n} + n$;

d) $d_n = 4 - (-2)^{n-2}$; e) $e_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$; f) $f_n = -\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$.

2. Užrašykite pirmuosius keturis sekos narius, kai:

a) $a_1 = -3$, $a_{n+1} = \frac{3^n}{a_n}$; b) $b_1 = 256$, $b_{n+1} = \log_4 b_n$.

3. Kurie sekos $x_n = \frac{2n+1}{n}$ nariai tenkina nelygybę:

a) $|x_n - 2| < 0{,}1$; b) $|x_n - 2| < 0{,}3$?

4. Koks pirmojo sekos a_n nario, tenkinančio nurodytą nelygybę, numeris:

a) $a_n = \frac{3n-4}{5n+2}$ ir $|a_n - 0{,}6| < 0{,}01$; b) $a_n = \frac{2n-7}{5n+9}$ ir $|a_n - 0{,}4| < 0{,}01$;

c) $a_n = \frac{5n+2}{3-9n}$ ir $\left|a_n + \frac{5}{9}\right| < 0{,}02$; d) $a_n = \frac{3-2n}{7n+3}$ ir $\left|a_n + \frac{2}{7}\right| < 0{,}02$.

5. Nustatykite, ar skaičius A yra nurodytos aritmetinės progresijos narys. Jei yra, raskite šio nario numerį n.

Nr.	A	Aritmetinė progresija	n
a)	106	10, 14, ...	
b)	30	−25, −19, ...	
c)	132	7, 12, ...	
d)	−4	47, 44, ...	
e)	128	−5, −2, ...	
f)	−184	1, −4, ...	

6. Raskite aritmetinės progresijos skirtumą, kai:

a) $a_5 = 18$ ir $a_{10} = 13$; b) $a_5 = 7$ ir $a_7 = 13$.

7. Žinomi aritmetinės progresijos du nariai:

a) $a_7 = 4{,}9$ ir $a_{17} = 10{,}9$. Kiek šioje progresijoje yra narių, mažesnių už 20?

b) $a_4 = 32{,}5$ ir $a_{12} = 29{,}3$. Kiek šioje progresijoje yra narių, didesnių už 10?

8. S_n yra sekos pirmųjų n narių sumos reikšmė. Naudodamiesi sekos pirmųjų n narių sumos S_n išraiška a) $S_n = 2n^2 + 3n$, b) $S_n = 4n^2 - 3n$:

1) raskite penkis šios sekos narius;

2) raskite dešimtąjį sekos narį;

3) įrodykite, kad duota seka yra aritmetinė progresija.

9. Užpildykite lentelę taip, kad kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio visi keturi nariai būtų tam tikros aritmetinės progresijos nariais:

a)

	5	10	
	10	15	

b)

1			
	2		
		3	
			4

10. Upės tėkmės greitis, garlaivio greitis prieš srovę ir garlaivio greitis pasroviui išreiškiami skaičiais, kurie sudaro aritmetinę progresiją. Garlaivis per 12 val. ir 48 min. nuplaukė nuo vienos prieplaukos iki kitos ir sugrįžo atgal. Raskite upės tėkmės greitį, jei atstumas tarp prieplaukų lygus 72 km.

11. Laisvai krintantis kūnas pirmąją sekundę įveikė 4,9 m atstumą, o kiekvieną sekančią — 9,8 m daugiau negu ankstesnę. Sakykime, kad iš vienodo aukščio buvo paleistas kristi vienas kūnas, o po 5 s — kitas. Po kiek laiko jie bus nutolę vienas nuo kito per 220,5 m?

12. Manoma, kad einant gilyn į Žemę kas 30 m planetos vidaus temperatūra pakyla 1 °C. Jei planetos paviršiaus temperatūra 10 °C, tai:
a) kokia bus planetos temperatūra 1 km gylyje;
b) kokiame gylyje planetos temperatūra atitiks vandens virimo temperatūrą 100 °C?

13. Raskite x reikšmę:

a) $3+5+7+\cdots+x=440$; b) $5+15+25+\cdots+x=2000$;

c) $2\cdot 2^4\cdot 2^7\cdot\ldots\cdot 2^x=2^{117}$; d) $5\cdot 5^3\cdot 5^5\cdot\ldots\cdot 5^x=5^{25}$.

14. Už šulinio pirmojo rentinio pagaminimą ir įleidimą sumokėta 33,2 Lt, už antrojo — 3 Lt mažiau negu už pirmojo, už trečiojo — 3 Lt mažiau negu už antrojo ir t. t. Už kokybišką darbą darbininkams buvo paskirta 110 Lt premija. Kiek rentinių buvo įleista į šulinį, jei vieno rentinio pagaminimas ir įleidimas vidutiniškai kainavo 28,2 lito?

15. Nustatykite, ar skaičius G yra nurodytos geometrinės progresijos narys. Jei yra — raskite šio nario numerį n.

Nr.	G	Geometrinė progresija	n
a)	25	$\frac{1}{125}$; $\frac{1}{25}$; ...	
b)	$\frac{1}{9}$	81; -27; ...	
c)	19,2	0,3; 0,6; ...	
d)	$-0{,}0625$	-64; -16; ...	
e)	$\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{16}$; $3\frac{3}{8}$; ...	
f)	1,35	$-0{,}2$; 0,5; ...	

16. Raskite nežinomus geometrinės progresijos narius:

a) b_1; -1; b_3; -4; b_5; b_6; b) b_1; 10; b_3; 2,5; b_5; b_6.

17. Raskite geometrinės progresijos (y_n) pirmąjį narį y_1 ir pirmųjų penkių jos narių sumą S_n, jei:

a) $\begin{cases} \frac{y_3}{y_5} = 4, \\ y_2 + y_6 = 255; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{y_7}{y_9} = \frac{1}{9}, \\ y_4 + y_2 = 180. \end{cases}$

18. Tegu S_n yra geometrinės progresijos pirmųjų n narių suma. Įrodykite, kad $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.

19. Užpildykite lentelę taip, kad kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio visi 4 nariai sudarytų tam tikrą geometrinę progresiją.

a)

1			$\frac{1}{8}$
			$\frac{1}{32}$

b)

4			
	−4		
		4	

20. Didėjanti geometrinė progresija turi 7 narius. Kraštinių narių suma 65, o jų sandauga 64. Raskite progresijos narių sumą.

21. Išreikškite skaičių 195 trijų dėmenų suma taip, kad dėmenys sudarytų geometrinę progresiją, o trečiasis dėmuo būtų 120 vienetų didesnis už pirmąjį.

22. Keturi skaičiai sudaro geometrinę progresiją. Pirmasis iš jų 36 vienetais didesnis už antrąjį, o trečiasis 4 vienetais didesnis už ketvirtąjį. Raskite tuos skaičius.

23. Geometrinės progresijos narių skaičius yra lygties $2^{x+3} - 2^x = 112$ sprendinys. Raskite šios geometrinės progresijos pirmąjį narį ir vardiklį, jei narių su lyginiais numeriais suma lygi 150, o narių su nelyginiais numeriais suma yra 50.

24. Geometrinės progresijos trečiojo ir šeštojo narių dešimtainiai logaritmai atitinkamai lygūs -1 ir 2. Raskite pirmąjį geometrinės progresijos narį.

25. Trikampio kraštinių ilgiai sudaro geometrinę progresiją, kurios vardiklis lygus $\sqrt{2}$; trumpiausiosios kraštinės ilgis lygus 2.

a) Raskite trikampio kraštines.

b) Įsitikinkite, kad trikampio perimetras lygus $2(3 + \sqrt{2})$.

c) Raskite didžiausio kampo kosinusą.

d) Apskaičiuokite šio trikampio plotą.

26. Pirmieji trys iš keturių skaičių sudaro aritmetinę, o paskutinieji trys — geometrinę progresiją. Pirmojo ir ketvirtojo skaičių suma lygi 14, o antrojo ir trečiojo suma lygi 12. Raskite šiuos skaičius.

27. Trys teigiami skaičiai sudaro aritmetinę progresiją. Jei prie antrojo skaičiaus pridėsime vienetą, o prie trečiojo — penkis, gautieji skaičiai sudarys geometrinę progresiją. Raskite šiuos skaičius, jeigu jų suma lygi 15.

28. Užrašę trijų brolių amžių metais, gautume tris skaičius, sudarančius geometrinę progresiją. Po 10 metų jauniausias brolis bus du kartus jaunesnis už vyriausiąjį. Koks brolių amžius dabar?

29. Nykstamosios geometrinės progresijos suma yra S. Raskite b_1 ir q, kai:

a) $b_1 + b_2 + b_3 = 189$, o $S = 192$; b) $b_1 + b_2 + b_3 = 78$, o $S = 81$.

30. Apskaičiuokite sumą:

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \cdots$;

b) $6\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} + \frac{4}{15} + \cdots$;

c) $\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{25} + \cdots$;

d) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + 1 + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} + \cdots$.

31. Apskaičiuokite:

a) $4,(3) + 5,(36)$; b) $2,4(6) + 3,3(1)$; c) $\frac{2,(5)+0,(43)}{0,3(2)}$; d) $\frac{1,2(4)+2,(4)}{13,(6)}$.

32. Duota seka:

a) 7,5; 9,8; 12,1; ...; 53,5;

b) 2; −9; −20; ...; −130;

c) 1; 4; 16; ...; 4096;

d) 98,3; 94,7; 91,1; ...; 22,7.

1) Nustatykite, ar užrašytoji seka yra aritmetinė ar geometrinė progresija.
2) Kiek sekoje yra narių?
3) Apskaičiuokite sekos narių sumą.

33. Vaistai geriami lašais: pirmąją dieną — 6 lašai, o kiekvieną sekančią 3 lašais daugiau, nei ankstesniąją dieną. Pradedant 11 diena, dienos norma mažinama 3 lašais ir gydymo kursas baigiamas praėjus 19 dienų nuo gydymo pradžios.

a) Kiek lašų vaistų išgers ligonis per pirmąsias 10 dienų?
b) Kiek iš viso numatyta išgerti lašų per visą gydymo kursą?

34. Pasirinkite teisingą atsakymą.

1) Išreiškę paprastąja trupmena skaičių 2,(25) gausime:

A $2\frac{1}{4}$ **B** 2,025 **C** $2\frac{25}{99}$ **D** $\frac{5}{4}$ **E** 2,25

2) Seka $-2\sqrt{3}$; $-3\sqrt{3}$; $-4\sqrt{3}$; $-5\sqrt{3}$ yra:

A didėjanti **B** begalinė **C** geometrinė progresija **D** mažėjanti
E aritmetinė progresija

3) Laikrodis muša tik valandas. Laikrodžio dūžių skaičius per parą lygus:

A 12 **B** 24 **C** 156 **D** 78 **E** nėra teisingo atsakymo

4) Ieva per pirmąją minutę nubėgo 280 m, o per kiekvieną kitą minutę — 20 m mažiau negu ankstesnę. Kokį atstumą ji nubėgo per 0,25 h?

A 2700 m **B** 2200 m **C** 2100 m **D** 4200 m **E** 1050 m

5) Duota seka: 1; $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; .... Ši seka yra:

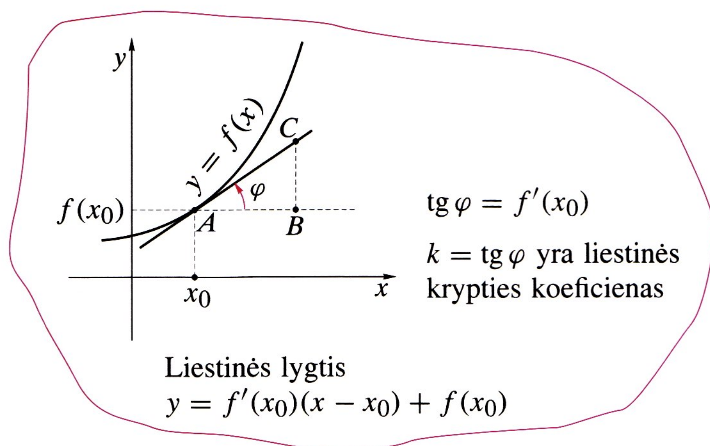
A mažėjanti **B** aritmetinė progresija **C** didėjanti
D nykstamoji geometrinė progresija **E** nėra teisingo atsakymo

9. Funkcijų išvestinės

Funkcijos $f(x)$ išvestine taške $x = x_0$ vadiname funkcijos reikšmių pokyčio ir argumento pokyčio ribą:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}, \qquad \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Išvestinės reikšmė $f'(x_0)$ lygi funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės taške $x = x_0$ krypties koeficientui.



Suradę funkcijos $f(x)$ išvestinę tuose taškuose, kuriuose ji egzistuoja, gauname naują funkciją. Ją vadiname funkcijos išvestine ir žymime $f'(x)$.
Funkcijų išvestines skaičiuojame naudodamiesi pagrindinių funkcijų išvestinių lentele ir išvestinių skaičiavimo taisyklėmis.

Pagrindinių funkcijų išvestinės

$c' = 0$

$(x^r)' = rx^{r-1}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \ (a > 0)$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \ (a > 0, a \neq 1)$

Funkcijų išvestinių skaičiavimo taisyklės

$\big(cf(x)\big)' = cf'(x)$

$\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x)$

$\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))g'(x)$

Pratimai ir uždaviniai

1. Funkcijos $f(x)$ pokytis lygus $\triangle f(x) = (x + \frac{\triangle x}{2}) \cdot \triangle x$. Be to, $f(-1) = 3$.
a) Raskite $f'(x)$. b) Raskite $f(x)$.

2. Funkcijos $f(x)$ pokytis lygus $\triangle f = -\triangle x(2x + 1 + \triangle x)$. Be to, $f(0) = -3$.
a) Raskite $f'(x)$. b) Raskite $f(x)$.

3. Apskaičiuokite
a) $f'(1) + f'(-1) + f'(0)$, kai $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 1$;
b) $f'(1) + f'(-1) + f'(2)$, kai $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2$.

4. Raskite x reikšmes, su kuriomis teisinga nelygybė $g'(x) < 2f'(x)$, kai $g(x) = 6x^2 + 6x - 2$, $f(x) = x(3 - x^2)$.

5. Raskite x reikšmes, su kuriomis teisinga nelygybė $g'(x) < 2f'(x) - f'(0)$, kai $g(x) = 2x^2 + 3x$, $f(x) = x(3 + x^2)$.

6. Raskite x reikšmes, su kuriomis $2g'(x) > f'(x) - 4f'(1)$, kai $g(x) = 3x^2 - 2x$, $f(x) = x^2(2 - x)$.

7. Raskite x reikšmes, su kuriomis teisinga lygybė:
a) $f(x) + 3f'(x) = 9$, kai $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-3x}$
b) $f(x) = \frac{1}{5}f'(x)$, kai $f(x) = 5^{-5x} - 1 - \ln 5$.

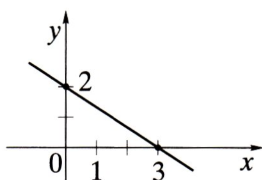
8. Išspręskite nelygybę $\frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant 0$, kai:
a) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2$, $g(x) = 2x^2 + 8x$; b) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2$, $g(x) = 3x^2 - 6x$.

9. Išspręskite nelygybę:
a) $4f'(x) - 1 < 0$, kai $f(x) = \frac{4}{5}x^5 - 3$; b) $8f'(x) + 1 > 0$, kai $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 4$.

10. Funkcija $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{4}\right)$ apibrėžta intervale $[0; \pi]$. Jos išvestinė taške x_0 lygi $-\frac{1}{4}$. Raskite $f(x_0)$.

11. Funkcija $f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{4}\right)$ apibrėžta intervale $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$. Jos išvestinė taške x_0 lygi $\frac{1}{4}$. Raskite $f(x_0)$.

12. Paveiksle pavaizduotas tiesinės funkcijos $f(x)$ grafikas:



1) Užrašykite tą funkciją formule.
2) Raskite jos išvestinę.
3) Apskaičiuokite plotą, apribotą funkcijos $f(x)$ grafiku, $f'(x)$ grafiku ir ordinačių ašimi.

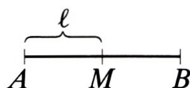
13. Taškas M juda tiese, toldamas nuo pastovaus taško O. Atstumas OM kiekvienu momentu t proporcingas t^2. Po 3 minučių nuo judėjimo pradžios taškas buvo nutolęs 18 m atstumu nuo taško O. Raskite taško:

a) judėjimo dėsnį;
b) vidutinį judėjimo greitį per 5 pirmąsias minutes;
c) vidutinį greitį intervale $[t_1; t_2]$.

14. Kūno, mesto vertikaliai aukštyn, aukštis virš žemės paviršiaus po t sekundžių yra $h(t) = 98t - 4{,}9t^2$ (m).

a) Raskite kūno pradinį greitį ir pagreitį.
b) Raskite kūno greitį momentu $t = 10$ (s).
c) Kada kūnas bus aukščiausiame taške?
d) Kada kūnas nukris?
e) Kokiu greičiu jis nukris?

15. Turime ploną 50 cm ilgio strypą AB. Strypo dalies AM masė nusakoma funkcija $m(\ell) = 2\ell^2 + 4\ell$ (g), čia $\ell = AM$.



a) Įrodykite, kad strypo masės tankis taške M užrašomas formule $\rho(\ell) = m'(\ell)$.
b) Raskite strypo tankį taške A.
c) Raskite strypo tankį taške B.
d) Raskite strypo tankį taške C, nutolusiame nuo A per 10 cm.
e) Raskite strypo AB masę.
f) Raskite strypo AB vidutinį tankį.
g) Kokiame taške strypo tankis lygus vidutiniam strypo tankiui?

16. Kai raketos variklis įjungtas, ji juda tiese pagal dėsnį $s(t) = \frac{1}{4}t^2$, $t \geqslant 0$. Laikas matuojamas minutėmis, atstumas — kilometrais. Išjungus variklį, raketa toliau juda pastoviu iki tol įgytu greičiu.

a) Kada reikia išjungti variklį, kad per 15 minučių nuo starto raketa nuskristų 50 km?
b) Koks raketos vidutinis greitis 50 km atkarpoje?
c) Koks raketos greitis variklio išjungimo metu?

17. Materialusis taškas tiese juda pagal dėsnį $s(t) = 3t^2 - \frac{t^3}{3}$, $0 \leqslant t \leqslant 10$. Atstumas matuojamas metrais, laikas — sekundėmis.

a) Kokį kelią taškas nueis per pirmąsias 3 sekundes?
b) Raskite taško greitį momentu $t = 2$.
c) Kada judėjimo greitis per pirmąsias 6 sekundes bus didžiausias?
d) Kokiu greičiu taškas judės momentu $t = 10$?
e) Nusakykite taško judėjimo laiko intervale [0; 10] eigą.

18. Tiesė $y = 3x + 2$ yra funkcijos $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 2$ grafiko liestinė. Raskite lietimosi taško koordinates.

19. Tiesė $y = 9x - 5$ yra funkcijos $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 1$ grafiko liestinė. Raskite lietimosi taško koordinates.

20. Ar tiesė $y = 6x + 7$ yra funkcijos $f(x) = 2x^3 + 3$ grafiko liestinė?

21. Duota funkcija $f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x + 1$.
a) Įsitikinkite, kad tiesė $y = 2x + 1$ yra funkcijos $f(x)$ grafiko liestinė taške $x_0 = 0$.
b) Raskite atstumą nuo koordinačių pradžios taško iki liestinės.

22. Duota parabolė $y = ax^2$.
a) Įrodykite, kad šios parabolės liestinės, su Ox ašimi sudarančios 135° kampą, lygtis yra $y = -x - \frac{1}{4a}$.
b) Su kokia a reikšme liestinė atkerta nuo plokštumos pirmojo ketvirčio $\frac{1}{32}$ (kvadratinio vieneto) ploto trikampį?

23. Duota parabolė $y = a + x^2$.
a) Įrodykite, kad šios parabolės liestinės, su Ox ašimi sudarančios 45° kampą, lygtis yra $y = x + a - \frac{1}{4}$.
b) Su kokia a reikšme liestinė atkerta nuo koordinačių plokštumos antrojo ketvirčio $\frac{1}{2}$ (kvadratinio vieneto) ploto trikampį?

24. Duota funkcija $f(x) = \frac{1}{x^2} - x$.
a) Įsitikinkite, kad tiesė $y = -3x + 3$ yra funkcijos $f(x)$ grafiko liestinė taške $x_0 = 1$.
b) Raskite plotą trikampio, kurį ši liestinė atkerta iš koordinačių plokštumos pirmojo ketvirčio.

25. Duota funkcija $f(x) = \frac{3x+8}{x+3}$.
a) Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką.
b) Raskite funkcijos $f(x)$ grafiko liestinę taške $x_0 = -4$.
c) Raskite liestinės ir koordinačių ašių susikirtimo taškus.

26. Duota funkcija $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 9}$.
a) Raskite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo ir reikšmių sritis.
b) Raskite funkcijos $f(x)$ grafiko liestinę taške $x_0 = 1$.
c) Raskite liestinės ir koordinačių ašių susikirtimo taškus.

27. Raskite a reikšmę, su kuria tiesė $y = 8x+4$ yra funkcijos $f(x) = 4\,\mathrm{e}^{-ax}$ grafiko liestinė taške $x_0 = 0$.

28. Raskite a reikšmę, su kuria tiesė $y = -2x + 5$ yra lygiagreti parabolės $y = ax^2 + 2x + 1$ liestinei taške $x_0 = -1$.

29. Duotos funkcijos $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, $g(x) = \cos(2x)$, $h(x) = \sin x \cdot \cos x$.
a) Raskite šių funkcijų grafikų liestinių taške $x_0 = 0$ lygtis.
b) Nubraižykite šių funkcijų grafikus ir jų liestines taške $x_0 = 0$.

30. Duotos funkcijos $f(x) = \sin x$, $g(x) = -\cos(2x)$, $h(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{\pi}{2}x$.
a) Raskite šių funkcijų grafikų liestinių taške $x_0 = \pi$ lygtis.
b) Nubraižykite šių funkcijų grafikus ir jų liestines taške $x_0 = \pi$.

31. Duotos dvi parabolės: $y = x^2 + 6x + 2$ ir $y = x^2 + 2x + 6$.
a) Parodykite, kad pirmosios parabolės lietinės taške x_0 lygtis yra $y = (2x_0 + 6)x - x_0^2 + 2$.
b) Raskite, su kokiu x_0 ši liestinė liečia ir antrąją parabolę. Parašykite bendros abiejų parabolių liestinės lygtį.

32. Duotos dvi parabolės: $y = x^2 - 4x - 8$ ir $y = x^2 - 8x - 4$.
a) Parodykite, kad pirmosios parabolės liestinės taške x_0 lygtis yra $y = (2x_0 - 4)x - x_0^2 - 8$.
b) Raskite, su kokiu x_0 ši liestinė liečia ir antrąją parabolę. Parašykite bendros abiejų parabolių liestinės lygtį.

33. Per koordinačių pradžios tašką nubrėžtos dvi parabolės $y = x^2 + x + 1$ liestinės. Raskite atstumą tarp lietimosi taškų.

34. Taškas $M(1; -3)$ yra šalia hiperbolės $y = \frac{1}{x}$.
a) Įsitikinkite, kad tiesė $y = -x - 2$ yra šios hiperbolės liestinė, einanti per tašką M.
b) Raskite dar vieną hiperbolės liestinę, einančią per M.
c) Raskite šių liestinių ir Oy ašies susikirtimo taškų ordinačių sumą.

35. Duota funkcija $f(x) = \ln(x - 1)$.
a) Raskite $D(f)$ ir $E(f)$.
b) Įrodykite, kad funkcija $g(x) = \mathrm{e}^x + 1$ yra funkcijos $f(x)$ atvirkštinė.
c) Raskite funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikų liestines, lygiagrečias tiesei $y = x$.
d) Nubraižykite funkcijų $f(x)$, $g(x)$ grafikus ir rastąsias liestines.

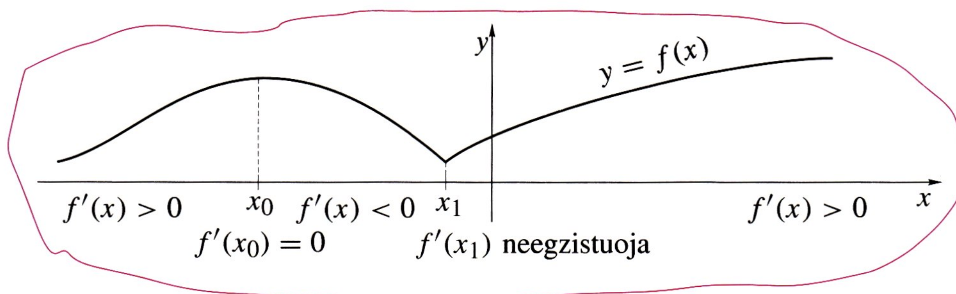
36. Duota funkcija $f(x) = \sqrt{x - 1} + a$.
a) Raskite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo ir reikšmių sritis.
b) Įrodykite, kad funkcija $g(x) = (x - a)^2 + 1, x \geqslant a$, yra atvirkštinė funkcijai $f(x)$.
c) Su kuria a reikšme funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikai turi bendrą liestinę $y = x$?
d) Nubraižykite funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikus, jų bendrą liestinę.

37. Raskite a reikšmes, su kuriomis parabolė $y = x^2 + 2ax + 4$ liečia Ox ašį.

38. Tiesiai važiuojančio automobilio greitis pirmąsias 4 sekundes nuo starto kito pagal dėsnį $v(t) = 2(t^2 - 6)\,\mathrm{e}^{-2t} + 12$ (m/s).
a) Raskite automobilio pagreitį.
b) Kada automobilio greitis buvo didžiausias? Raskite jį, išreikškite kilometrais per valandą trijų ženklų po kablelio tikslumu.

10. Funkcijų tyrimas

Išvestinės — geras įrankis funkcijoms tirti.



Jeigu visuose intervalo taškuose funkcijos išvestinė yra teigiama, tai tame intervale funkcija yra didėjanti, jeigu neigiama — mažėjanti.
Taškai, kuriuose funkcijos išvestinė lygi nuliui arba iš viso neegzistuoja, vadinami kritiniais.
Jeigu praeinant kritinį tašką išvestinės ženklas keičiasi iš pliuso į minusą — kritinis taškas yra maksimumo taškas; jeigu iš minuso į pliusą — minimumo taškas.

Pratimai ir uždaviniai

1. Įrodykite, kad funkcijos $f(x)$ reikšmės didėja visoje jos apibrėžimo srityje:

a) $f(x) = x^3 + 3x$; b) $f(x) = 2x + 4e^{2x}$;

c) $f(x) = 3x + 2x^5 + \cos x$; d) $f(x) = x^3 + 7x - 3\sin(2x)$.

2. Įrodykite, kad funkcijos $f(x)$ reikšmės mažėja visoje jos apibrėžimo srityje:
a) $f(x) = 3e^{-x} - 4x$; b) $f(x) = 4\cos(3x) - 16x - 2x^5$.

3. Raskite funkcijos $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ apibrėžimo sritį ir įrodykite, kad $f(x)$ reikšmės didėja intervale (0; 2), o mažėja intervale (2; 4).

4. Raskite funkcijos $f(x) = 2x + 3e^{-2x}$ reikšmių mažėjimo intervalą.

5. Raskite funkcijos $f(x) = -2x - \frac{1}{3}e^{-3x}$ reikšmių didėjimo intervalą.

6. Pateikite pavyzdį funkcijos, kurios išvestinė $f'(0) = 0$, tačiau taške $x = 0$ ekstremumo nėra. Nubraižykite tos funkcijos grafiką.

7. Įrodykite, kad funkcija $f(x)$ savo apibrėžimo srityje neturi nei minimumo, nei maksimumo taškų:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 4$; b) $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 + 1$.

8. Raskite funkcijos $f(x) = \frac{2x^2+3x+9}{x+3}$ didėjimo ir mažėjimo intervalus.

9. Ištirkite, kaip elgiasi funkcijos $f(x) = x^3 - 3\cos x$ reikšmės intervale $(2; 4)$ — didėja ar mažėja.

10. Ištirkite, kaip elgiasi funkcijos $f(x) = x^4 + 2\sin x$ reikšmės intervale $(1; 3)$ — didėja ar mažėja.

11. Raskite funkcijos $f(x)$ didėjimo ir mažėjimo intervalus:

a) $f(x) = (x+3)e^{-2x}$; b) $f(x) = x^2\sqrt{1-3x}$; c) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

12. Nurodykite sveikąjį skaičių a tokį, kad funkcija $f(x) = (a^2 - 2a - 3)x - 3x^3$ būtų mažėjanti visoje realiųjų skaičių aibėje.

13. Įrodykite, kad funkcija $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{2}{3}$ įgyja maksimumą. Raskite funkcijos reikšmę maksimumo taške.

14. Raskite funkcijos $f(x) = x^5 + 4x^3 - 17x - 1$ ekstremumus.

15. Duota lygtis $x^2 - ax + a - 1 = 0$.

a) Įsitikinkite, kad šios lygties sprendinių kvadratų suma yra $x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2a + 2$.

b) Su kuria a reikšme lygties sprendinių kvadratų suma mažiausia? Raskite a reikšmę panaudodami išvestinę ir jos nenaudodami.

16. Raskite tokį funkcijos $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ grafiko tašką, kad atstumų nuo jo iki koordinačių ašių suma būtų mažiausia. Raskite mažiausią atstumų sumą.

17. Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti reiškinys $x + y$, kai $x^2 + y^2 = 4$?

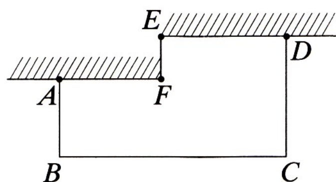
18. Kokią mažiausią reikšmę gali įgyti reiškinys $x - y$, kai $x^2 + y^2 = 4$?

19. Duota funkcija $f(x) = 4 - x^2$, $x > 0$.

a) Parodykite, kad šios funkcijos grafiko liestinės taške x_0 lygtis yra $y = -2x_0x + x_0^2 + 4$.

b) Raskite tokį funkcijos grafiko tašką, kad nubrėžę per jį liestinę nuo pirmojo koordinačių plokštumos ketvirčio atkirstume mažiausio ploto trikampį.

20. Prie pastato sienos tveriama vielinė tvora. Yra 20 m tinklo. Tvora turi prasidėti taške A, nutolusiame 2 m nuo pastato kampo F, $EF = 1$ m.



a) Pažymėję atkarpos AB ilgį raide x, parodykite, kad su turimu tinklu galima aptverti stačių kampų aikštelę, kurios plotas $S_{ABCDEF} = (x+1)\cdot(19-2x) - 2$.

b) Raskite kraštinių AB, BC ir CD ilgius, kai aptveriamas plotas didžiausias.
c) Kokį didžiausią plotą galima aptverti?
d) Kokį didžiausią plotą su tuo pačiu tinklu galima aptverti prie tiesios sienos?

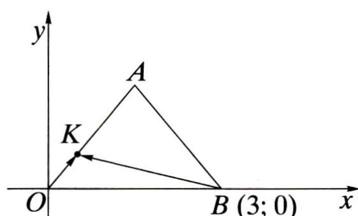
21. Stačiojo trikampio įžambinė lygi c.
a) Kokį didžiausią perimetrą gali turėti toks trikampis?
b) Raskite didžiausią perimetrą turinčio trikampio kampus.

22. Stačiojo trikampio aukštinė, nuleista į įžambinę, lygi h.
a) Pažymėję vieną statinio ilgį raide x, įrodykite, kad tokio trikampio plotas yra
$S = \frac{x^2h}{\sqrt{x^2-h^2}}$.
b) Kokiems statinių ilgiams esant tokio trikampio plotas bus mažiausias?
c) Koks gali būti mažiausias tokio trikampio plotas?

23. Stačiosios trapecijos perimetras $P = 4$, o smailusis kampas $\alpha = 45°$.
a) Pažymėję trapecijos aukštinę x, parodykite, kad trapecijos plotas lygus
$S = 2x - \frac{1+\sqrt{2}}{2}x^2$.
b) Kokiai aukštinei esant tokios trapecijos plotas bus didžiausias?

24. Į skritulį įbrėžtos trapecijos ilgesnysis pagrindas yra skritulio skersmuo. Kampas prie pagrindo lygus α. Skritulio spindulys lygus r.
a) Išreikškite trapecijos aukštinę h ir trumpesnįjį pagrindą a dydžiais r ir α.
b) Įsitikinkite, kad trapecijos plotas lygus $S(\alpha) = 2r^2 \sin^2\alpha \cdot \sin(2\alpha)$.
c) Raskite kampą α, su kuriuo trapecijos plotas yra didžiausias. Raskite tą plotą.

25. Lygiakraščio trikampio ABO viršūnė O yra koordinačių pradžios taške, o B — ašyje Ox. $OB = 3$. Taškas K yra kraštinėje OA.
a) Pažymėję taško K abscisę raide x, parodykite, kad vektoriaus $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{BK}$ koordinatės yra $(2x - 3; 2x\sqrt{3})$.
b) Kokiam vektoriaus $\overrightarrow{OK}$ ilgiui esant vektoriaus $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{BK}$ ilgis bus mažiausias? Koks yra mažiausias $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{BK}$ ilgis?
c) Įrodykite, kad taškui K slenkant tiese OA vektoriaus $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{BK}$ (atidėto nuo taško O) galas slenka taip pat tiese. Raskite tos tiesės lygtį.

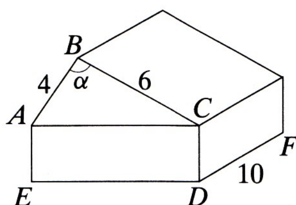


26. Projektuojama $72\,\text{m}^3$ tūrio taisyklingosios keturkampės prizmės formos talpykla. Šoninių sienų danga kainuoja $60\,\text{Lt/m}^2$, dugno — $40\,\text{Lt/m}^2$.

a) Parodykite, kad šoninių sienų ir dugno danga kainuoja
$K(x) = 40x^2 + \frac{17\,280}{x}$ (Lt);
čia x — prizmės pagrindo kraštinės ilgis.

b) Kokie turi būti talpyklos matmenys, kad šoninių sienų ir dugno danga kainuotų mažiausiai?

27. Projektuojamas pastatas asimetrišku dvišlaičiu stogu. Stogo šlaitų ilgiai $AB = 4\,\text{m}$ ir $BC = 6\,\text{m}$. Pastato ilgis $DF = 10\,\text{m}$, plotis $DE = 4AE$.



a) Išreikškite kampu $\alpha = \angle ABC$ pastato plotį.

b) Parodykite, kad tokio pastato tūris yra
$V(\alpha) = 120\sin\alpha - 120\cos\alpha + 130\,(\text{m}^3)$.

c) Kokiam kampui α esant pastato tūris būtų didžiausias?

28. Gaminama $8\,\text{m}^3$ talpos ritinio formos statinė.

a) Pažymėję ritinio pagrindo spindulį raide x, įrodykite, kad statinės šoninio paviršiaus ir dugno plotas išreiškiamas formule $S = \frac{16}{x} + \pi x^2$.

b) Kokie turi būti ritinio pagrindo spindulys ir ritinio aukštinė, kad statinės gamybai sunaudotos medžiagos kiekis būtų mažiausias?

29. Ritinys gaunamas sukant stačiakampį, kurio perimetras 24 cm, apie vieną iš kraštinių.

a) Įrodykite, kad šio ritinio tūris spinduliu r išreiškiamas taip:
$V(r) = \pi r^2(12 - r)$.

b) Kokiam ritinio spindulio ir aukštinės santykiui esant ritinio tūris bus didžiausias?

c) Raskite didžiausią tokio ritinio tūrį.

d) Įrodykite, kad šio ritinio šoninio paviršiaus plotas $S(r) = 2\pi r(12 - r)$.

e) Kokiam ritinio spindulio ir aukštinės santykiui esant ritinio šoninio paviršiaus plotas bus didžiausias?

f) Raskite didžiausią tokio ritinio šoninio paviršiaus plotą.

30. Kūgio sudaromoji lygi 6 m.

a) Įrodykite, kad kūgio aukštinę pažymėję h, tūrį galime išreikšti formule
$V(h) = \frac{1}{3}\pi h(36 - h^2)$.

b) Su kokia aukštine tokio kūgio tūris bus didžiausias?

c) Apskaičiuokite didžiausią tokio kūgio tūrį (kubiniais metrais, trijų ženklų po kablelio tikslumu).

31. Kūgio pagrindo spindulys ir aukštinė lygūs 6 cm.

a) Įrodykite, kad į šį kūgį įbrėžto ritinio tūris išreiškiamas formule $V(r) = r^2(6 - r)$; čia r — ritinio pagrindo spindulys.

b) Kokiam ritinio spinduliui ir aukštinei esant šio ritinio tūris bus didžiausias?

c) Įrodykite, kad į kūgį įbrėžto ritinio šoninis paviršius yra $S(r) = 2\pi r(6 - r)$.

d) Kokiam ritinio spinduliui ir aukštinei esant šio ritinio šoninis paviršius bus didžiausias?

32. Rutulio spindulys R.

a) Įrodykite, kad į šį rutulį įbrėžto kūgio tūris yra $V = \frac{1}{3}\pi(2R - h)h^2$.

b) Kokia turi būti įbrėžto kūgio aukštinė, kad jo tūris būti didžiausias?

c) Raskite didžiausią galimą kūgio tūrį.

d) Apskaičiuokite kampą tarp to kūgio aukštinės ir sudaromosios (minutės tikslumu).

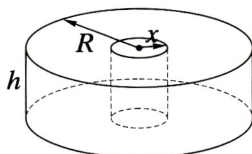
33. Iš skritulio, kurio spindulys lygus R, išpjaunama išpjova, kurios lanko ilgis x.

a) Įrodykite, kad ši išpjova yra kūgio, kurio aukštinė $h = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2R^2 - x^2}$ šoninio paviršiaus išklotinė.

b) Įrodykite, kad gautojo kūgio tūris yra $V = \frac{1}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2R^2 - x^2}$.

c) Kurią apskritimo dalį turi sudaryti išpjovos lankas, kad kūgio tūris būtų didžiausias?

34. Iš ritinio formos ruošinio išgręžus skylę gaminamas radiatorius tranzistoriui šaldyti. Laikoma, kad šaldo išorinis šoninis, vidinis ir viršutinis žiedinis paviršiai.

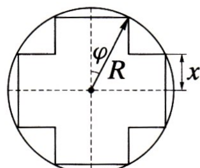


Ritinio spindulys R, aukštinė h, $R > h$.

a) Pažymėję raide x gręžiamos skylės spindulį, parodykite, kad šaldančio paviršiaus plotas $S = \pi(R + x)(2h + R - x)$.

b) Kokio spindulio skylę reikia gręžti, kad šaldantis paviršius būtų didžiausias?

35. Konstruojant kai kuriuos kintamosios elektros srovės transformatorius, šerdis daroma kryžiaus formos, stengiantis, kad ji maksimaliai užpildytų vidų tarp apskritiminių apvijų.



a) Pažymėję x pusę kryžiaus skersinio (žr. brėžinį), įsitikinkite, kad į R spindulio skritulį įbrėžto kryžiaus plotas yra $S = 4(2x\sqrt{R^2 - x^2} - x^2)$.

b) Su kuria x reikšme kryžiaus plotas maksimalus?

c) Apskaičiuokite to kryžiaus apytikslį kampo φ dydį (laipsnio tikslumu).

11. Integralai

Jei $F'(x) = f(x)$, tai funkcija $F(x)$ vadinama funkcijos $f(x)$ pirmykšte. Reiškinys, kuriuo užrašomos visos $f(x)$ pirmykštės funkcijos, vadinamas neapibrėžtiniu funkcijos $f(x)$ integralu. Neapibrėžtinis integralas žymimas taip:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

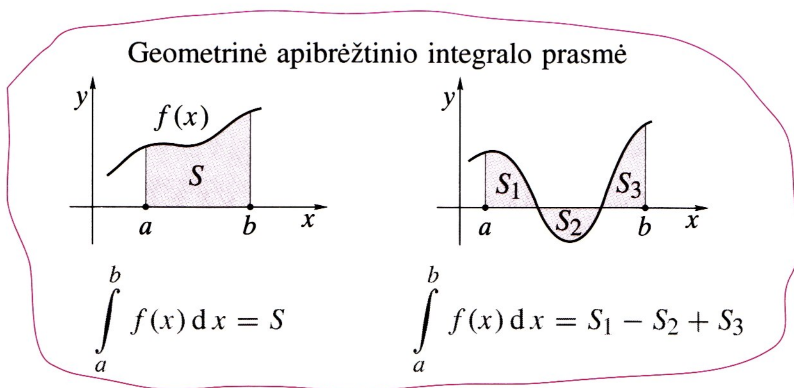
Pavyzdžiui,

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C, \qquad \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C;$$

čia C — konstanta, kuriai suteikdami skirtingas reikšmes gauname skirtingas pirmykštes funkcijas.

Apibrėžtinis funkcijos $f(x)$ integralas rėžiuose nuo a iki b yra skaičius. Jis žymimas

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

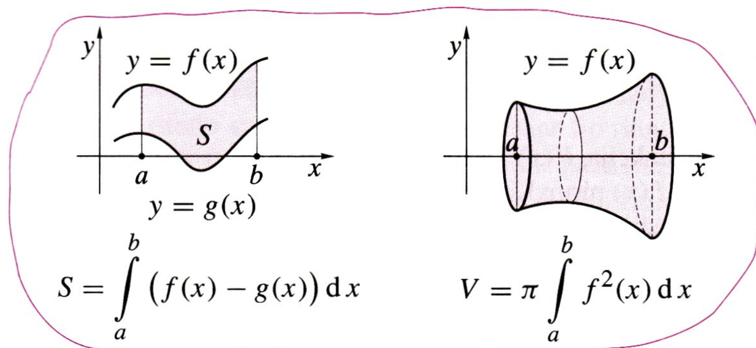


$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S_1 - S_2 + S_3$$

Apibrėžtinį integralą skaičiuojame naudodamiesi Niutono–Leibnico formule:

$$\text{jei} \quad F'(x) = f(x), \quad \text{tai} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Apibrėžtinį integralą galima taikyti figūrų plotams ir kūnų tūriams skaičiuoti.



Pratimai ir uždaviniai

1. Nubraižykite funkcijos $f(x) = 1 - 2x$ pirmykštės funkcijos grafiką, einantį per tašką $A(0; 2)$.

2. Raskite tokią funkciją $F(x)$, kad būtų $F'(x) = 2 - 4x$ ir $F(1) = 6$.

3. Kas daugiau:

a) $\int_0^1 \frac{x+2}{x+1}\,dx$ ar 2;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$ ar $\frac{\pi}{2}$;

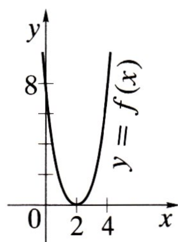
c) $\int_0^2 e^{3x}\,dx$ ar 50?

4. Duotas integralas $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$.

a) Įrodykite, kad $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx = \int_0^3 (x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx - \int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx$.

b) Apskaičiuokite šį integralą.

5. Brėžinyje pavaizduota parabolė.

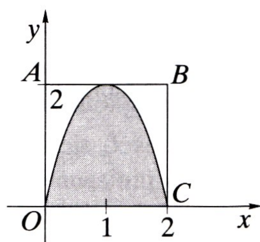


a) Užrašykite funkcijos $f(x)$, kurios grafikas pavaizduotas, išraišką.

b) Apskaičiuokite $f'(x)$.

c) Raskite plotą figūros, apribotos $f(x)$ ir $f'(x)$ grafikais.

6. Brėžinyje pavaizduotas kvadratas $OABC$ ir parabolė.



a) Raskite funkcijos $f(x)$, kurios grafikas pavaizduotas, išraišką.
b) Kurią kvadrato dalį sudaro nuspalvinta figūra?

7. Duota parabolė $y = x^2 + 4$.
a) Raskite lygtis šios parabolės liestinių, nubrėžtų per tašką $O(0; 0)$.
b) Apskaičiuokite plotą kreivinio trikampio, apriboto parabole ir liestinėmis.
c) Apskaičiuokite trikampio su viršūnėmis taške $O(0; 0)$ ir lietimosi taškuose plotą. Kurią šio trikampio dalį sudaro b) dalyje apskaičiuotas kreivinis trikampis?

8. Duota funkcija $f(x) = \frac{1}{5}x^5$.
a) Raskite lygtis funkcijos grafiko liestinių, sudarančių su Ox ašimi 45° kampą.
b) Apskaičiuokite plotą figūros, apribotos funkcijos $f(x)$ grafiku ir tiesės atkarpa, jungiančia koordinačių pradžią su lietimosi tašku ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$).

9. Duotos dvi funkcijos: $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \frac{4}{\pi}x$, $x \geqslant 0$.
a) Pavaizduokite figūrą, apribotą $f(x)$ ir $g(x)$ grafikais.
b) Raskite tos figūros plotą.

10. Duotos dvi funkcijos: $f(x) = \sin \frac{x}{2}$, $g(x) = \frac{1}{\pi}x$, $x \geqslant 0$.
a) Pavaizduokite figūrą, apribotą $f(x)$ ir $g(x)$ grafikais.
b) Raskite tos figūros plotą.

11. Figūrą riboja funkcijos $f(x) = x^2 + 2ax + a^2$ grafikas, abscisių ašis, tiesės $x = 0$, $x = 2$.
a) Įrodykite, kad šios figūros plotas yra $S(a) = \frac{2}{3}(3a^2 + 6a + 4)$.
b) Su kuria a reikšme figūros plotas mažiausias?
c) Kuo ypatinga figūros forma, kai jos plotas mažiausias?

12. Kreivinė trapecija, apribota funkcijų $f(x) = x^2$ ir $g(x) = \sqrt[3]{x}$ grafikais, sukama apie abscisių ašį.
a) Raskite sukamos figūros plotą.
b) Raskite gauto sukinio tūrį.

13. Kreivinė trapecija, apribota funkcijų $f(x) = x^3$ ir $g(x) = \sqrt{x}$ grafikais, sukama apie abscisių ašį.
a) Raskite sukamos figūros plotą.
b) Raskite gauto sukinio tūrį.

12. Įvykių tikimybės

Kai visos bandymo baigtys vienodai galimos, įvykio tikimybę skaičiuojame pagal klasikinį apibrėžimą:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n},$$

čia n — visų bandymo baigčių skaičius, m — palankių įvykiui A baigčių skaičius.
Dažnai žinant vienų įvykių tikimybes reikia apskaičiuoti kitų įvykių tikimybes. Skaičiuojant neretai praverčia šios lygybės:

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\bar{A}), \qquad \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

Atsitiktiniai įvykiai A ir B vadinami nepriklausomais, jei

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B).$$

Taigi žinodami nepriklausomų įvykių A ir B tikimybes visada galime apskaičiuoti įvykio, kad įvyks abu įvykiai A ir B (t. y. įvykio $A \cap B$) tikimybę.
Kai A ir B nėra nepriklausomi, skaičiuodami įvykio $A \cap B$ tikimybę galime pasinaudoti formule

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(A|B),$$

čia $\mathbf{P}(A|B)$ — sąlyginė įvykio A tikimybė su sąlyga, kad įvyko įvykis B.

Pratimai ir uždaviniai

1. Keturi draugai nusipirko 4 bilietus į kiną. Bilietuose sužymėtos tos pačios eilės 10, 11, 12 ir 13 vietos. Kokia tikimybė, kad Tomas ir Giedrius atsisės greta, jei bilietus jie pasirinks atsitiktinai?

2. Iš karto metami du lošimo kauliukai — raudonas ir mėlynas. Kokia tikimybė, kad raudonojo ir mėlynojo kauliuko atsivertusių akučių skirtumas bus:
a) lyginis skaičius; b) teigiamas lyginis skaičius?

3. Ant stalo pažertos dvi 2 centų ir penkios 5 centų monetos. Julius atsitiktinai paima dvi monetas. Kokia tikimybė, kad jo „laimikis“ yra:
a) 10 centų; b) 7 centai; c) 4 centai?

4. Petro lagamino užrakto kodas iš keturių skaitmenų. Surinkęs du pirmuosius skaitmenis, jis susigriebė pamiršęs paskutiniuosius du, todėl Petras šiuos skaitmenis surinko atsitiktinai. Kokia tikimybė, kad lagaminas atsirakins?

5. Vaiko žaidimų dėžėje 4 raudoni, 6 žali ir 5 mėlyni rutuliai. Jis atsitiktinai paima du rutuliukus. Kokia tikimybė, kad abu jie bus vienodos spalvos?

6. Tikimybė, kad keturi iš eilės šaulio šūviai į taikinį bus netaiklūs, lygi 0,0081. Apskaičiuokite tikimybę, kad du šūviai iš trijų bus taiklūs.

7. Du sodo kaimynai 20 kopūstų, tarp kurių 4 raudongūžiai, derlių nusprendė pasidalyti po lygiai atsitiktiniu būdu. Kokia tikimybė, kad kiekvienam iš jų teks po du raudongūžius kopūstus?

8. Vienoje dėžėje yra 10 antaninių ir 12 ananasinių obuolių, kitoje — ir antaninių, ir ananasinių yra po 15. Kokia tikimybė, kad, atsitiktinai perdėjus du obuolius iš pirmosios dėžės į antrąją, antroje dėžėje kiekvienos veislės obuolių visvien bus po lygiai?

9. Tikimybė, kad už matematikos kontrolinį darbą Tomas gaus dešimtuką, lygi 0,9. Tikimybė, kad jo draugas Saulius gaus dešimtuką, lygi 0,85. Apskaičiuokite tikimybę, kad:
a) abu draugai gaus dešimtukus; b) bent vienas iš jų gaus dešimtuką.

10. Antanas, Jonas ir Petras turi po automobilį. Tikimybė, kad per metus nesuges Antano automobilis, lygi 0,9, kad per metus nesuges Jono automobilis — 0,8, o kad nesuges Petro — 0,85. Kokia tikimybė, kad:
a) per metus bent vienas draugų automobilis nesuges;
b) suges vienas iš draugų automobilių; c) suges du draugų automobiliai;
d) suges visi trys automobiliai?

11. Klasėje 25 mokiniai. Penkiolika iš jų moka anglų kalbą, o penki iš pastarųjų moka ir rusų kalbą. Atsitiktinai pasirinktas mokinys pasirodė bemokąs anglų kalbą. Kokia tikimybė, kad jis moka ir rusų kalbą?

12. Iš karto metami du lošimo kauliukai — juodas ir baltas. Apskaičiuokite tikimybę, kad abiejų kauliukų atsivertusių akučių suma lyginė, jeigu juodasis atsivertė 5 akutėmis.

13. Tikimybė, kad per vienerius mokslo metus vadovėlis bus suteptas, yra 0,2, o tikimybė, kad vadovėlį reikės iš naujo įrišti, lygi 0,1. Sąlyginė tikimybė, kad vadovėlį reikės iš naujo įrišti su sąlyga, jog jis suteptas, yra 0,15. Apskaičiuokite tikimybę, kad:
a) vadovėlis bus suteptas ir jį reikės iš naujo įrišti;
b) vadovėlis bus suteptas (arba suteptas, arba jį reikės iš naujo įrišti, arba jis bus suteptas ir jį reikės iš naujo įrišti).

14. Du draugai, paskyrę susitikimo vietą, susitarė, kad susitiks tarp 18 val. ir 19 val. ir lauks vienas kito ne daugiau kaip 15 min. Vienodai tikėtina, kad kiekvienas iš jų gali ateiti į susitikimo vietą bet kuriuo sutartos valandos momentu. Apskaičiuokite tikimybę, kad draugams pavyks susitikti.

Patarimas. Uždavinys sprendžiamas taikant geometrinę interpretaciją. Tegu x ir y — pirmojo ir antrojo draugo atėjimo į susitikimo vietą momentai (skaičiuojant nuo 18 val.). Tuomet jie susitiks tik tuomet, kai $|x - y| \leqslant \frac{1}{4}$. Ieškomąją tikimybę interpretuojame kaip „palankaus ploto“ ir viso kvadrato, kai $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, ploto santykį.

---

13. Atsitiktiniai dydžiai ir statistika

Atsitiktinis dydis nusakomas taisykle, kuri priskiria baigtims tam tikrus skaičius. Pavyzdžiui, jeigu metus kauliuką pralošiamas 1 litas, kai atsiverčia ne daugiau kaip 2 akutės; nei pralošiama, nei išlošiama, jei atsiverčia 3 ar 4 akutės; ir laimimas 1 litas, jei atsiverčia 5 ar 6 akutės, tai išlošį galima nusakyti atsitiktiniu dydžiu X, įgyjančiu reikšmes -1, 0 ir 1.
Akivaizdu, kad

$$\mathbf{P}(X=-1)=\mathbf{P}(X=0)=\mathbf{P}(X=1)=\frac{1}{3}.$$

Nagrinėjant atsitiktinį dydį, patogu jo reikšmes ir reikšmių tikimybes surašyti į lentelę:

$m=$	x_1	x_2	...
$\mathbf{P}(X=m)=$	p_1	p_2	...

čia $x_1, x_2, \ldots$ — visos atsitiktinio dydžio reikšmės, o $p_1, p_2, \ldots$ — tų reikšmių tikimybės. Tokia lentelė vadinama atsitiktinio dydžio X skirstiniu.
Atsitiktinio dydžio matematinė viltis ir dispersija apibrėžiami lygybėmis:

$$\mathbf{E}X = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots,$$
$$\mathbf{D}X = (x_1-\mathbf{E}X)^2p_1 + (x_2-\mathbf{E}X)^2p_2 + \cdots.$$

Dydis $\sigma(X)=\sqrt{\mathbf{D}X}$ vadinamas standartiniu atsitiktinio dydžio X nuokrypiu.
Kai kartu nagrinėjame du atsitiktinius dydžius X, Y, tikimybes $\mathbf{P}(X=x_i, Y=y_j)=$ $=p_{ij}$ patogu surašyti į lentelę

Y / X	y_1	y_2	y_3	...
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	...
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	...
x_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	...
$\vdots$				

Tokia lentelė vadinama atsitiktinių dydžių poros (X, Y) skirstiniu. Sumuodami tikimybes, užrašytas pirmoje šios lentelės eilutėje gauname tikimybę $\mathbf{P}(X=x_1)$, antroje — tikimybę $\mathbf{P}(X=x_2)$ ir t. t.
Tikimybes $\mathbf{P}(Y=y_1)$, $\mathbf{P}(Y=y_2)$ ir t. t. gauname susumavę lentelės stulpeliuose surašytus skaičius.

Jeigu atlikus vieną bandymą galimos tik dvi baigtys (sėkmė ir nesėkmė), tai pakartojus tokį bandymą n kartų gautų sėkmių skaičius X yra atsitiktinis dydis, galintis įgyti reikšmes nuo 0 iki n.
Jeigu sėkmės tikimybė viename bandyme yra p $(0 < p < 1)$, o nesėkmės — $q = 1 - p$, ir kartojami bandymai nedaro įtakos vieni kitiems, tai

$$\mathbf{P}(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (m = 0, 1, \ldots, n).$$

Toks atsitiktinis dydis vadinamas binominiu.
Paprastai tikrovėje pasitaikančių atsitiktinių dydžių tikimybes žinome tik apytiksliai (arba iš viso nežinome). Tačiau galime kartoti stebėjimus ir gauti daug atsitiktinio dydžio reikšmių.
Atsitiktinio dydžio reikšmių eilę

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n,$$

gautą atlikus n bandymų (stebėjimų), vadiname atsitiktine imtimi.
Dažniausiai pasitaikiusią reikšmę imtyje vadiname imties moda. Imtis gali turėti kelias modas. Jei visos reikšmės pasitaiko po tą patį skaičių kartų, imtis modos neturi.
Imtis taip pat apibūdinama jos kvartiliais.
Labai svarbios imties vidurkio, dispersijos ir standartinio nuokrypio sąvokos:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \quad \text{— imties vidurkis,}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\big((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots\big) \quad \text{— imties dispersija,}$$

$$s = \sqrt{s^2} \quad \text{— standartinis imties nuokrypis.}$$

Jeigu kartu stebime dviejų atsitiktinių dydžių X ir Y reikšmes, gauname dvi imtis:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n;$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Šių imčių koreliacijos koeficientas skaičiuojamas taip:

$$r = \frac{(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) - n(\bar{x}\bar{y})}{(n-1)s_x \cdot s_y}.$$

Koreliacijos koeficientas gali įgyti reikšmes iš intervalo $[-1; 1]$. Jo reikšmė priklauso nuo to, ar ryšys tarp dydžių X ir Y yra panašus į tiesinį.

Pratimai ir uždaviniai

1. Dėžėje yra 2 balti ir 3 juodi sunumeruoti rutuliai. Atsitiktinai išimami 3 rutuliai. Tegu X — juodų rutulių skaičius tarp ištrauktųjų.
a) Sudarykite bandymo baigčių aibę.
b) Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip atsitiktinio dydžio X reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių.
c) Raskite atsitiktinio dydžio X tikimybių skirstinį.
d) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį (vidurkį), dispersiją ir standartinį nuokrypį.

2. Bandymas, kurį sudaro dviejų monetų metimas, kartojamas tris kartus. Sakysime, jog įvyko įvykis A, jeigu abi monetos atsivertė skaičiumi. Pažymėkime X atsitiktinį dydį, reiškiantį, kiek kartų įvyko A.
a) Raskite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
b) Apskaičiuokite $\mathbf{E}X$, $\mathbf{D}X$ ir $\sigma(X)$.

3. Rašant laiškus elektroniniu paštu, tikimybė, kad žodis bus surinktas neteisingai, lygi 0,1. Laiškas sudarytas iš 10 žodžių. Apskaičiuokite tikimybę, kad:
a) visas laiško tekstas surinktas teisingai;
b) neteisingai surinktas vienas žodis;
c) neteisingai surinkta lygiai pusė žodžių.

4. Atsitiktinio dydžio X skirstinys yra

$m =$	-1	0	1	2
$\mathbf{P}(X = m) =$	0,1	x	y	0,2

čia x ir y žymi nežinomas tikimybes. Vidurkis $\mathbf{E}X = 0{,}4$.
a) Apskaičiuokite tikimybes x ir y.
b) Apskaičiuokite $\mathbf{D}X$ ir $\sigma(X)$.

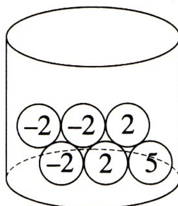
5. Atsitiktinio dydžio X skirstinys yra

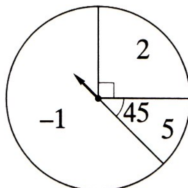
$m =$	-1	0	1
$\mathbf{P}(X = m) =$	x	y	0,2

čia x ir y — nežinomos tikimybės. Dispersija $\mathbf{D}X = 0{,}29$.
a) Apskaičiuokite tikimybes x ir y.
b) Apskaičiuokite $\mathbf{E}X$.

6. Vienas lošėjas lošia traukdamas iš dėžės rutulį, kitas — pasukdamas ratą. Dėžėje yra 6 rutuliai: ant trijų užrašytas skaičius -2, ant dviejų 2 ir ant vieno 5. Laimėjimo dydis litais X sutampa su skaičiumi, užrašytu ant ištraukto rutulio (-2 reiškia 2 Lt pralaimėjimą).

Lošimo ratas suskirstytas sektoriais taip: 45° sektoriuje užrašytas 5 Lt laimėjimas, 90° sektoriuje — 2 Lt laimėjimas, o 225° sektoriuje — 1 Lt pralaimėjimas, t. y. -1. Laimėjimo dydis Y sutampa su skaičiumi, parašytu sektoriuje, ties kuriuo sustoja rodyklė.





a) Parašykite atsitiktinio dydžio X ir atsitiktinio dydžio Y skirstinius.
b) Parašykite atsitiktinių dydžių poros (X, Y) skirstinį.
c) Apskaičiuokite atsitiktinių dydžių X ir Y vidurkius $\mathbf{E}X$ ir $\mathbf{E}Y$.
d) Apskaičiuokite atsitiktinių dydžių X ir Y standartinius nuokrypius $\sigma(X)$ ir $\sigma(Y)$.
e) Kuris lošėjas lošiant ilgesnį laiką labiau rizikuoja pralošti?

7. Lietuvos Žemės ūkio rūmų duomenimis 2003 m. rugpjūčio 16 dieną kilogramas pomidorų Lietuvos turguose kainavo (litais):

1,4; 1,1; 0,9; 1,0; 1,0; 1,3; 3,8; 1,1; 0,9; 1,2; 1,4; 1,3; 1,5; 1,3; 1,2; 1,3; 1,1;
1,2; 1,0; 1,3; 1,4; 1,5; 1,8; 0,7; 1,2; 1,4; 1,2; 1,7; 1,4;

o kilogramas agurkų tuose pačiuose turguose atitinkamai

0,8; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 0,6; 1,4; 0,9; 1,1; 0,4; 0,7; 0,5; 1,0; 0,9; 1,0; 1,0; 1,1;
1,0; 1,0; 1,1; 1,0; 1,0; 0,7; 0,4; 0,8; 0,9; 0,6; 1,2; 1,0.

Apskaičiuokite pomidorų kainos p ir agurkų kainos a modas, kvartilius, vidurkius, standartinius nuokrypius.
Apskaičiuokite kainų koreliacijos koeficientą. Ar galima teigti, kad ryšys tarp kainų primena tiesinį?

14. Planimetrija

Jeigu vieno trikampio kraštinės lygios atitinkamai kito trikampio kraštinėms ir pirmojo trikampio kampai lygūs atitinkamai kito trikampio kampams, tai trikampius vadiname lygiais.

Jeigu vieno trikampio kraštinės proporcingos atitinkamoms kito trikampio kraštinėms ir atitinkami kampai yra lygūs, tai trikampius vadiname panašiaisiais.

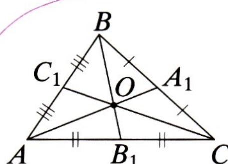
Dažniausiai išvadas apie trikampių lygumą (ar panašumą) darome remdamiesi trikampių lygumo (panašumo) požymiais.

Pavyzdžiui, jei dvi trikampio kraštinės yra lygios kito trikampio kraštinėms ir pirmojo trikampio kampas tarp šių kraštinių lygus kito trikampio atitinkamam kampui, tai trikampiai yra lygūs.

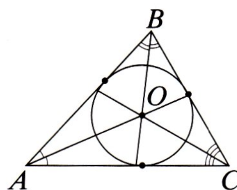
Jei vieno trikampio du kampai atitinkamai lygūs kito trikampio dviem kampams, tai trikampiai yra panašūs.

Žinome, kad yra ir daugiau trikampių lygumo bei panašumo požymių.

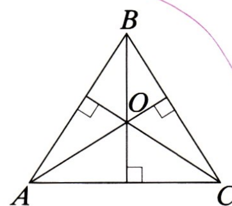
Trikampis turi daug savybių, kuriomis naudojamės spręsdami uždavinius.



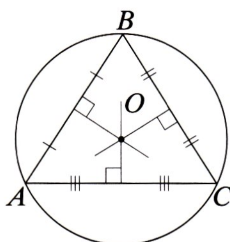
Trikampio pusiaukraštinės kertasi viename taške, ir $\frac{AO}{OA_1} = \frac{BO}{OB_1} = \frac{CO}{OC_1} = 2$.



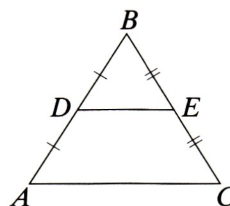
Trikampio pusiaukampinės kertasi viename taške, šis taškas yra įbrėžtinio apskritimo centras.



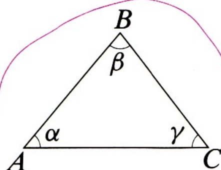
Trikampio aukštinės kertasi viename taške.



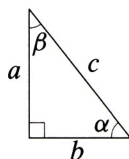
Statmenys, išvesti per trikampio kraštinių vidurio taškus kertasi viename taške, šis taškas yra apibrėžtinio apskritimo centras.



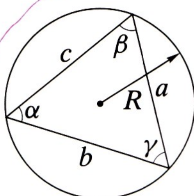
$DE \parallel AC$, $DE = \frac{1}{2}AC$
Trikampio vidurinės linijos savybė.



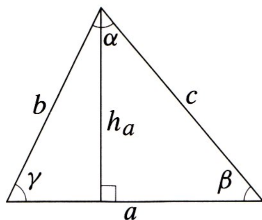
Trikampio kampų suma lygi π:
$\alpha + \beta + \gamma = \pi$.



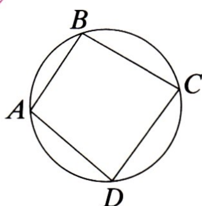
Stačiojo trikampio kraštinių ilgių santykiai yra kampų trigonometrinės funkcijos:
$\frac{a}{c} = \sin\alpha$, $\frac{b}{c} = \cos\alpha$, $\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$.



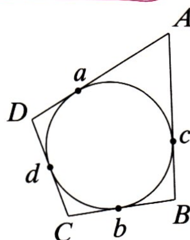
Bet kokiam trikampiui teisinga kosinusų teorema
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.
Jei kampas γ status, tai ši teorema virsta Pitagoro teorema stačiajam trikampiui:
$c^2 = a^2 + b^2$.
Bet kokiam trikampiui teisinga sinusų teorema:
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.



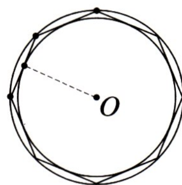
Yra daug formulių trikampio plotui skaičiuoti:
$S_\triangle = \frac{1}{2}a \cdot h_a$,
$S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$,
$S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, kur
$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.



$\angle A + \angle C = \pi$
$\angle B + \angle D = \pi$
Jei keturkampio priešingųjų kampų suma lygi π, tai apie keturkampį galima apibrėžti apskritimą.

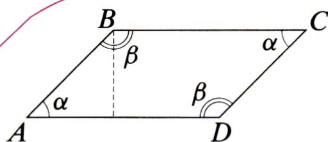


$a + b = c + d$
Jei keturkampio priešingųjų kraštinių ilgių sumos yra lygios, tai į keturkampį galima įbrėžti apskritimą.

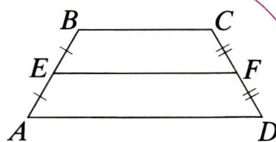


Į taisyklingąjį daugiakampį, (daugiakampį, kurio visos kraštinės ir visi kampai lygūs) galima įbrėžti apskritimą.
Apie taisyklingąjį daugiakampį galima apibrėžti apskritimą.

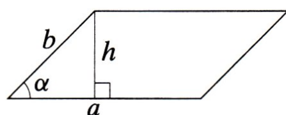
Jeigu keturkampio priešingosios kraštinės yra lygiagrečios, tai keturkampį vadiname lygiagretainiu, o jeigu yra tik viena lygiagrečių priešingųjų kraštinių pora — vadiname trapecija.



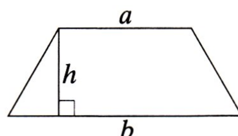
$ABCD$ — lygiagretainis,
$AD \parallel BC$, $AD = BC$,
$AB \parallel CD$, $AB = CD$,
$\alpha + \beta = \pi$.



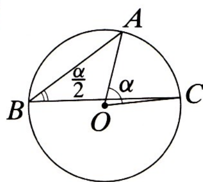
$ABCD$ — trapecija,
$AD \parallel BC$,
EF — vidurinė linija,
$EF \parallel AD$, $EF = \frac{AD+BC}{2}$.



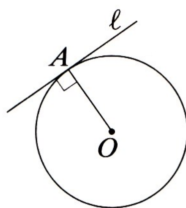
Lygiagretainio plotas
$S = ah = ab \sin \alpha$.



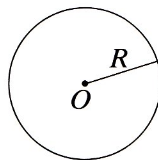
Trapecijos plotas
$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$.



Įbrėžtinis kampas lygus pusei atitinkamo centrinio kampo, $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$.



$OA \perp \ell$
Apskritimo spindulys statmenas liestinei lietimosi taške.



Apskritimo ilgis $C = 2\pi R$.
Skritulio plotas $S = \pi R^2$.
Čia $\pi \approx 3{,}1415...$

Pratimai ir uždaviniai

1. Lygiakraščio trikampio aukštinė lygi $7\sqrt{6}$ cm. Apskaičiuokite trikampio plotą $1\,\text{cm}^2$ tikslumu.

2. Trikampio dvi kraštinės lygios 8 ir 18, o kampas tarp jų 120°. Raskite to kampo pusiaukampinę.

3. Trikampio pagrindo ir aukštinės suma lygi 15 cm. Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti trikampio plotas?

4. Trikampio ABC kampas A lygus 45°, kampas B lygus 30° ir $AC = 4\sqrt{2}$. Įrodykite, kad:
a) apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulys $R = AC$;
b) trikampio ABC plotas lygus $S = 16\sqrt{2}\sin 75^\circ$.

5. Bukąjį kampą sudarančių trikampio kraštinių ilgiai yra 1 m ir 5 m, o trikampio plotas lygus $2\,\text{m}^2$. Apskaičiuokite trečios trikampio kraštinės ilgį.

6. Trikampio kraštinių ilgiai proporcingi skaičiams 13, 14, 15 ir sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas lygus 2. Apskaičiuokite:
a) į trikampį įbrėžto apskritimo spindulio ilgį;
b) apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgį.

7. Į statųjį trikampį įbrėžto apskritimo spindulys r, o ir apie jį apibrėžto apskritimo spindulys R.
a) Įrodykite, kad trikampio perimetras $P = 2r + 4R$.
b) Išreikškite šio trikampio plotą spinduliais r ir R.

8. Lygiašonio trikampio ABC ($AB = BC$) plotas lygus 10, o kampo B kosinusas lygus $\frac{21}{29}$. Raskite trikampio perimetrą.

9. Lygiašonio trikampio pagrindas lygus 48, šoninė kraštinė — 30. Raskite įbrėžto ir apibrėžto apskritimų spindulių ilgius.

10. Lygiašonio trikampio pagrindo vidurio taškas nutolęs nuo šoninės kraštinės 12 cm. Apskaičiuokite perimetrą, jei trikampio plotas lygus $300\,\text{cm}^2$.

11. Trikampio viena kraštinė du kartus ilgesnė už kitą, o kampas tarp jų lygus $60°$. Trikampio plotas $\frac{25\sqrt{3}}{2}$. Apskaičiuokite trikampio perimetrą.

12. Stačiojo trikampio kraštinių ilgiai yra aritmetinės progresijos nariai, o jo įžambinė lygi 35. Raskite:

a) į trikampį įbrėžto apskritimo spindulio ilgį;

b) apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgį.

13. Vienas stačiojo trikampio statinis yra 3 cm trumpesnis už antrąjį ir sudaro 0,6 įžambinės. Raskite trikampio perimetrą ir plotą.

14. Trikampio ABC pusiaukraštinė AM yra statmena pusiaukraštinei BN. Raskite trikampio ABC plotą, jei $AM = 6$, $BN = 12$.

15. Trikampio ABC pusiaukraštinės lygios $BK = 18$, $AM = 24$ ir $CL = 30$. Raskite trikampio ABC plotą.

16. Raskite lygiašonio trikampio plotą, jei jo aukštinė, nuleista į pagrindą, lygi 10 cm, o aukštinė, nuleista į šoninę kraštinę, lygi 12 cm.

17. Raskite trikampio plotą, jei jo aukštinės lygios 12 cm, 15 cm ir 20 cm.

Nurodymas. Trikampio kraštines išreikškite jo plotu S ir įsitikinkite, kad trikampis statusis (statinių ilgiai 15 cm ir 20 cm).

---

18. Stačiojo trikampio perimetras 24 cm. Apibrėžto apie trikampį apskritimo spindulys lygus 5 cm. Raskite trikampio plotą.

19. Į skritulį įbrėžto stačiojo trikampio statiniai lygūs 10 cm ir 24 cm. Raskite skritulio plotą.

20. Prieštaros metodu įrodykite tokius trikampio lygumo požymius:

a) Jei vieno trikampio du kampai yra lygūs kito trikampio dviem kampams ir kraštinė prieš vieną šių kampų viename trikampyje yra lygi atitinkamai kraštinei kitame trikampyje, tai trikampiai yra lygūs.

b) Jei vieno trikampio dvi kraštinės yra lygios kito trikampio dviem kraštinėms, o kampas, esantis prieš didesniąją iš tų kraštinių viename trikampyje, lygus atitinkamam kampui kitame trikampyje, tai trikampiai yra lygūs.

21. Kvadrato įstrižainės ilgis lygus $20\sqrt{2}$. Apskaičiuokite:
a) kvadrato kraštinės ilgį;
b) kvadrato plotą;
c) į kvadratą įbrėžto skritulio plotą;
d) apie kvadratą apibrėžto apskritimo ilgį.

22. Stačiakampio $ABCD$ kraštinėse AB, AD pažymėti vidurio taškai M ir N. Apskaičiuokite stačiakampio įstrižainės ilgį, jei $BN = \sqrt{95}$, $DM = \sqrt{85}$.

23. Stačiakampio įstrižainės susikerta $60°$ kampu, o jo plotas lygus $16\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Apskaičiuokite stačiakampio kraštinių ilgius.

24. Lygiagretainio kraštinių ilgiai yra $\sqrt{2}$ ir $\sqrt{5}$, o smailusis kampas lygus α. Apskaičiuokite lygiagretainio ilgesniosios įstrižainės ilgį, jei $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

25. Lygiagretainio kraštinės lygios 15 ir 40, o kampas tarp jų yra $60°$. Apskaičiuokite lygiagretainio:
a) įstrižainių ilgius; b) plotą.

26. Lygiagretainio kraštinės lygios 6 dm ir 4,8 dm, o jo aukštinių ilgių suma lygi 9 dm. Apskaičiuokite lygiagretainio aukštinių ilgius.

27. Lygiagretainio įstrižainių ilgių kvadratų suma lygi 178, o gretimų kraštinių ilgių santykis yra 1,6. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą.

28. Rombo perimetras lygus 40 cm, o smailusis kampas — $30°$. Apskaičiuokite rombo plotą.

29. Rombo įstrižainių santykis $5 : 12$, o jo plotas lygus 270. Apskaičiuokite rombo perimetrą.

30. Rombo smailusis kampas lygus $30°$. Įrodykite, kad rombo kraštinės ilgis yra jo įstrižainių ilgių geometrinis vidurkis.

31. Lygiašonės trapecijos šoninė kraštinė lygi 34, o aukštinė — 30. Trapecijos pagrindų ilgių santykis $1 : 3$. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

32. Lygiašonės trapecijos vidurinė linija lygi 12 cm, o įstrižainė — 13,6 cm. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

33. Lygiašonės trapecijos pagrindų ilgiai yra 6 ir 18, o jos įstrižainės susikerta stačiu kampu. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

34. Stačiosios trapecijos pagrindų ilgiai yra 36 ir 45, o jos trumpesnioji įstrižainė statmena šoninei kraštinei. Apskaičiuokite trumpesniosios įstrižainės ir jai statmenos šoninės kraštinės ilgių santykį.

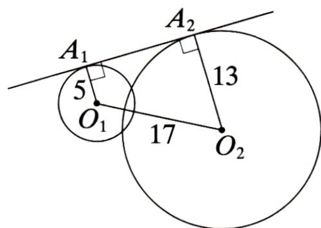
35. Į $\sqrt{53}$ cm skersmens apskritimą įbrėžtas stačiakampis, kurio kraštinių ilgių skirtumas lygus 5 cm. Apskaičiuokite stačiakampio perimetrą.

36. Rombo įstrižainės ilgis 26. Raskite rombo perimetrą ir plotą, jei į jį įbrėžto apskritimo spindulys lygus 12.

37. Apie 15 cm spindulio apskritimą apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios pagrindų ilgių skirtumas lygus 32 cm. Apskaičiuokite trapecijos perimetrą.

38. Į trikampį, kurio kraštinės yra 6, 10 ir 12, įbrėžtas apskritimas. Nubrėžta apskritimo liestinė, kertanti dvi ilgesniąsias trikampio kraštines. Raskite atkirstojo trikampio perimetrą.

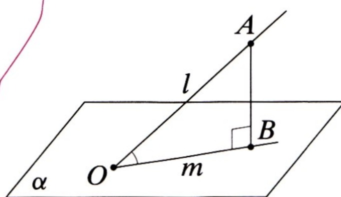
39. Duota: du susikertantys apskritimai;
A_1A_2 — bendra apskritimų liestinė;
$O_1A_1 = 5\,\text{cm}$, $O_2A_2 = 13\,\text{cm}$, $O_1O_2 = 17\,\text{cm}$.
Apskaičiuoti: trapecijos $O_1A_1A_2O_2$ plotą.



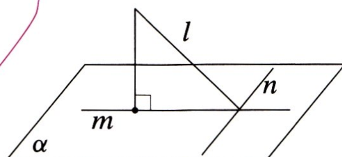
40. Lygiašonio trikampio ABC ($AC = BC$) aukštinė AD lygi 12, o į trikampį ABD įbrėžto apskritimo spindulys lygus 2. Apskaičiuokite trikampio ABC:
a) aukštinės CE ilgį;
b) perimetrą.

15. Stereometrija

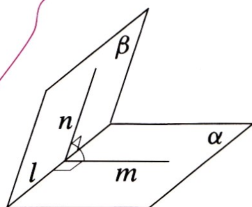
Tiesė erdvėje gali kirsti plokštumą arba būti jai lygiagreti. Jeigu tiesė kerta plokštumą ir yra statmena bet kuriai plokštumos tiesei, išvestai per sankirtos tašką, tai tiesę vadiname statmeniu plokštumai. Tiesė, kuri nėra nei lygiagreti, nei statmena plokštumai, vadinama pasvirąja.



Tiesė l kerta plokštumą α;
AB — statmuo į plokštumą α;
Tiesė m, einanti per O ir B, vadinama tiesės l projekcija.
Kampu tarp tiesės l ir plokštumos vadiname kampą $\angle AOB$.

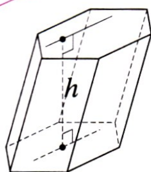


l yra pasviroji, m — jos projekcija.
Trijų statmenų teoremos:
jei $n \perp m$, tai ir $n \perp l$;
jei $n \perp l$, tai ir $n \perp m$.



Dvisienį kampą, kurį sudaro dvi susikertančios plokštumos α ir β, matuojame kampu, kurį sudaro tiesės, einančios per vieną tašką ir statmenos plokštumų kirtimosi tiesei.

Geometrinį kūną, apribotą plokščiaisiais daugiakampiais, vadiname briaunainiu.



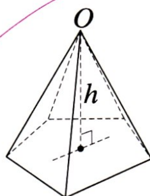
Prizmės tūris

$V_{pr.} = S_{pagr.} \cdot h$

$S_{pagr.}$ — pagrindo plotas

Prizmė yra briaunainis, kurio dvi sienos (pagrindai) yra lygiagrečiose plokštumose, o šių sienų atitinkamos kraštinės yra lygiagrečios.

Šoninės sienos yra lygiagretainiai.



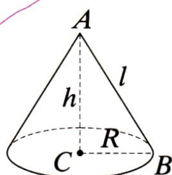
Briaunainis, kurio visos sienos (išskyrus galbūt vieną) yra trikampiai, vadinamas piramide.

Piramidės tūris

$V_{pir.} = \frac{1}{3} S_{pagr.} \cdot h$

$S_{pagr.}$ — piramidės pagrindo plotas,

h — aukštinė.



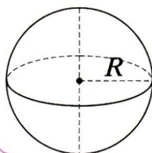
Sukdami statųjį trikampį apie vieną statinį, gauname kūgį.

Kūgio tūris:

$V_{kūgio} = \frac{1}{3} S_{pagr.} \cdot h = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h.$

Kūgio šoninis paviršius

$S_{šon.} = \frac{1}{2}(2\pi R) \cdot l = \pi R l.$



Sukdami skritulį apie jo skersmenį, gauname rutulį.

Rutulio tūris $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Rutulio paviršiaus plotas (sferos plotas) $S = 4\pi R^2$.

Pratimai ir uždaviniai

1. Kubo pagrindo įstrižainės ilgis 16 cm. Apskaičiuokite:
a) kubo įstrižinio pjūvio plotą;
b) kubo viso paviršiaus plotą;
c) kubo tūrį.

2. Stačiakampio gretasienio aukštinė lygi 5, šoninio paviršiaus plotas — 170, o tūris — 300. Apskaičiuokite stačiakampio gretasienio pagrindo kraštinių ilgius.

3. Stačiojo gretasienio pagrindas yra rombas, kurio trumpesnioji įstrižainė lygi 4. Gretasienio įstrižainės lygios 7 ir 9. Įrodykite, kad rombo smailusis kampas yra 60°.

4. Taisyklingosios trikampės prizmės pagrindo kraštinė lygi 5 cm, o šoninio paviršiaus plotas lygus pagrindų plotų sumai. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

5. Taisyklingosios keturkampės prizmės šoninės sienos įstrižainė su pagrindu sudaro kampą α ir $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}3$. Prizmės šoninio paviršiaus plotas lygus 48,6. Apskaičiuokite prizmės įstrižinio pjūvio plotą.

6. Taisyklingosios šešiakampės prizmės tūris yra $384\sqrt{3}$, o pagrindo plotas lygus $96\sqrt{3}$. Apskaičiuokite prizmės visų briaunų ilgių sumą.

7. Stačiosios trikampės prizmės pagrindo kraštinės lygios 4 ir $2\sqrt{2}$, o kampas tarp jų yra 45°. Prizmės aukštinė lygi $2\sqrt{2}$. Apskaičiuokite prizmės viso paviršiaus plotą.

8. Pasvirosios trikampės prizmės pagrindai yra lygiakraščiai trikampiai, kurių kraštinės ilgis $2\sqrt{3}$. Viena jos šoninių briaunų su gretimomis pagrindo kraštinėmis sudaro 60° kampą, o jos ilgis lygus 4. Apskaičiuokite prizmės viso paviršiaus plotą.

***9.** Pasvirosios prizmės $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pagrindas yra kvadratas. Šoninė briauna AA_1 lygi $9\sqrt{2}$ cm ir pasvirusi į pagrindo plokštumą 45° kampu. Prizmės viršūnės A_1 projekcija pagrindo plokštumoje sutampa su pagrindo įstrižainės AC vidurio tašku O. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

10. Stačiosios prizmės $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pagrindas yra lygiašonė trapecija $ABCD$, kurios kraštinės $AB = CD = 5{,}2$ cm, $BC = 4{,}4$ cm, $AD = 8{,}4$ cm. Jos įstrižinio pjūvio plotas lygus $28{,}8\ \text{cm}^2$. Apskaičiuokite prizmės:
a) viso paviršiaus plotą ($1\ \text{cm}^2$ tikslumu);
b) tūrį ($1\ \text{cm}^3$ tikslumu).

11. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė lygi $14\sqrt{3}$ cm. Šoninė siena pasvirusi į pagrindo plokštumą 60° kampu. Apskaičiuokite piramidės:
a) viso paviršiaus plotą; b) tūrį.

12. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo įstrižainė lygi $6\sqrt{2}$, o šoninė briauna lygi 5. Apskaičiuokite piramidės:
a) šoninio paviršiaus plotą; b) piramidės tūrį.

13. Taisyklingosios šešiakampės piramidės apotema su pagrindo plokštuma sudaro 30° kampą, o aukštinė lygi 5. Apskaičiuokite piramidės šoninės briaunos ilgį.

14. Piramidės pagrindas yra lygiašonis trikampis, kurio kraštinių ilgiai yra 13 cm, 13 cm ir 10 cm. Visi dvisieniai kampai prie pagrindo lygūs 45°. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

15. Piramidės pagrindas yra lygiašonis trikampis, kurio kraštinių ilgiai yra 13 cm, 13 cm ir 10 cm. Vìsos piramidės šoninės briaunos su pagrindu sudaro 45° kampus. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

16. Nupjautinės piramidės pagrindai yra taisyklingieji trikampiai, kurių kraštinės lygios 12 ir 20. Viena šoninė briauna statmena pagrindo plokštumai ir lygi 4. Apskaičiuokite nupjautinės piramidės:
a) viso paviršiaus plotą;
b) tūrį.

17. Ritinio šoninio paviršiaus plotas lygus 240π, o ašinio pjūvio įstrižainė — 26. Apskaičiuokite ritinio tūrį.

18. Kūgio šoninio paviršiaus ir jo pagrindo plotų santykis 5 : 3, o kūgio sudaromoji lygi 5. Apskaičiuokite kūgio tūrį.

19. Nupjautinio kūgio pagrindų spinduliai lygūs 9 cm ir 15 cm, o sudaromoji pasvirusi į pagrindo plokštumą 45° kampu. Apskaičiuokite šio nupjautinio kūgio:
a) sudaromosios ilgį;
b) šoninio paviršiaus plotą;
c) tūrį.

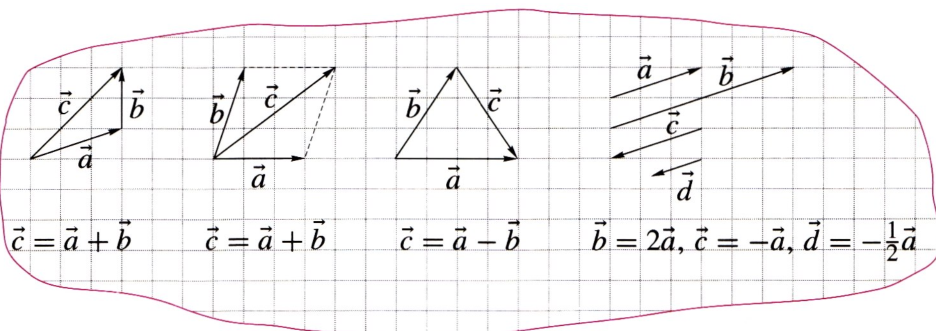
20. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindas yra įbrėžtas į kūgio pagrindą. Jos tūris yra du kartus didesnis už kūgio tūrį. Kiek kartų piramidės aukštinė yra didesnė už kūgio aukštinę?

21. Trikampio kraštinės lygios 13 cm, 14 cm, 15 cm ir liečia rutulio paviršių. Atstumas tarp trikampio plokštumos ir rutulio centro yra $4\sqrt{3}$ cm. Apskaičiuokite rutulio spindulio ilgį.

22. Taškai A, B ir C išsidėstę sferos paviršiuje taip, kad sujungę juos tiesių atkarpomis gauname trikampį, kurio kraštinės 15, 21 ir 24. Sfera kertama plokštuma, einančia per minėtus taškus ir nutolusia nuo sferos centro 7 cm atstumu. Apskaičiuokite sferos spindulio ilgį.

16. Vektoriai

Vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ galime sudėti, atimti vieną iš kito, taip pat galime dauginti vektorius iš skaičių.



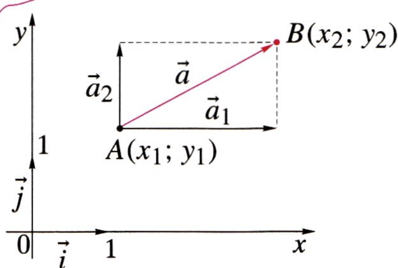
Du vektoriai, esantys toje pačioje arba lygiagrečiose tiesėse, vadinami kolineariais. Jeigu jų kryptys sutampa, juos vadiname vienakrypčiais, jeigu priešingos — priešpriešiais.

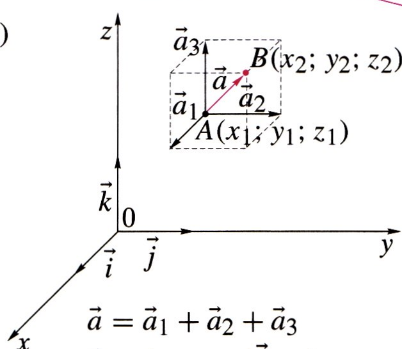
Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ ($\vec{b}$ — nenulinis vektorius) yra kolinearūs tik tada, kai yra toks skaičius m, kad

$$\vec{a} = m \cdot \vec{b}.$$

Vienakrypčiai to paties ilgio vektoriai vadinami lygiais.

Bet kurį vektorių galima išreikšti vienetiniais koordinačių sistemos ašių vektoriais.





$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$

$\vec{a} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$

$\vec{a}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$

$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$

$\vec{a} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$

$\vec{a}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$

Jei $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ($\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$), tai skaičiai x, y (x, y, z) vadinami vektoriaus $\vec{a}$ koordinatėmis; rašome $\vec{a}(x; y)$ ($\vec{a}(x; y; z)$).

Jei

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad \text{ir} \quad \vec{a}(x_1; y_1; z_1), \vec{b}(x_2; y_2; z_2),$$

tai

$$\vec{c}(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2);$$

jei

$$\vec{d} = m\vec{a},$$

tai

$$\vec{d}(mx_1; my_1; mz_1).$$

Tas pačias savybes turi ir plokštumos vektorių koordinatės.
Nenulinių vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinė sandauga yra skaičius, apibrėžiamas lygybe

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

Jeigu bent vienas iš vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nulinis, tai ir skaliarinė sandauga lygi 0.
Jei

$$\vec{a}(x_1; y_1; z_1) \quad \text{ir} \quad \vec{b}(x_2; y_2; z_2),$$

tai

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

Skaliarinis vektoriaus $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ kvadratas lygus jo ilgio kvadratui:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = |\vec{a}|^2.$$

Vektoriai $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ ir $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ yra statmeni, kai

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

t. y.

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Kampą tarp nenulinių vektorių $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ ir $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ galime apskaičiuoti naudodamiesi formule

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Analogiškas formules plokštumos vektoriams gauname imdami $z_1 = z_2 = 0$.

Pratimai ir uždaviniai

1. Duota: $ABCD$ — lygiašonė trapecija,
$BE \perp AD$, $CF \perp AD$, $BCFE$ — kvadratas, $EC = 8\sqrt{2}$ cm,
$FD = 6$ cm, MN — trapecijos vidurinė linija.
Apskaičiuokite: a) $|\overrightarrow{AB}|$; b) $|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}|$.

2. Kampas tarp spindulių, išeinančių iš taško M, kuriuose yra vektoriai $\overrightarrow{MA}$ ir $\overrightarrow{MB}$, lygus $120°$. $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}| = 1$. Apskaičiuokite:
a) $|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$; b) $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$.

3. M — lygiagretainio $ABCD$ kraštinės AB vidurio taškas, N — kraštinės CD vidurio taškas. Išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$ ir $\overrightarrow{AN} = \vec{b}$:
a) vektorių $\overrightarrow{AC}$;
b) vektorių $\overrightarrow{BD}$.

4. Trys taškai A, B ir C išsidėstę taip, kad $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{BC}$, o taškas O yra bet kuris plokštumos taškas. Vektorių $\overrightarrow{OB}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{OC}$.

5. O — bet kuris plokštumos taškas, o taškai A, B ir C išsidėstę taip, kad
$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$.
Vektorių $\overrightarrow{AC}$ išreikškite vektoriumi $\overrightarrow{CB}$.

6. Nubrėžtas stačiakampis $ABCD$. Įrodykite lygybę
$\left|\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})\right| = \left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right|$.

7. Trapecijoje $ABCD$ vektorius $\overrightarrow{BC} = m\overrightarrow{AD}$. Įrodykite, kad vektorius
$\vec{p} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$
kolinearus $\overrightarrow{AD}$ ir išraiškoje $\vec{p} = k\overrightarrow{AD}$ raskite koeficiento k reikšmę.

8. Per rombo $ABCD$ viršūnę D nubrėžta tiesė, lygiagreti tiesei AC ir kertanti tiesę BC taške E. Taškas O — rombo įstrižainių susikirtimo taškas. Vektorių $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{DE}$ sumą išreikškite vektoriais $\overrightarrow{CD} = \vec{a}$ ir $\overrightarrow{OD} = \vec{b}$.

9. Apie statųjį trikampį ABC ($\angle C = 90°$) apibrėžtas apskritimas, kurio centras O. $|\overrightarrow{AC}| = b$, $|\overrightarrow{BC}| = a$. Apskaičiuokite $2|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BO}|$.

10. Duotas lygiagretainis $ABCD$. Kraštinėje AD pažymėtas taškas K, o kraštinėje AC — taškas L taip, kad $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. Įrodykite, kad vektoriai $\overrightarrow{KL}$ ir $\overrightarrow{BL}$ yra kolinearūs ir išraiškoje $\overrightarrow{KL} = k\overrightarrow{BL}$ raskite koeficiento k reikšmę.

11. Trikampio ABC viršūnės yra taškai $A(1; 1)$, $B(0; 3)$, $C(-1; -1)$. Apskaičiuokite koordinates vektorių:

a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$;

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

12. a) Raskite vektoriaus $\overrightarrow{MN}$, lygaus vektoriui $\vec{m}$, galo N koordinates, kai: $\vec{m}(-5; 1)$, $M(-2; 10)$.

b) Raskite vektoriaus $\overrightarrow{MN}$, lygaus vektoriui $\vec{n}$, pradžios M koordinates, kai: $\vec{n}(3; -4)$, $(-3; 0)$.

13. Duoti vektoriai $\vec{a}(1; -2; 5)$, $\vec{b}(4; 0; -2)$, $\vec{c}(0; -1; -3)$. Raskite vektoriaus $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ koordinates ir ilgį.

14. Su kuria m reikšme vektoriai $\vec{a}(5; m)$, $\vec{b}(m; 20)$ yra kolinearūs ir:

a) priešpriešiai;

b) vienakrypčiai?

15. Žinomos trikampio ABC viršūnių koordinatės: $A(1; 3)$, $B(3; 6)$, $C(-2; 5)$. Apskaičiuokite trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taško O koordinates.

16. Žinomos trikampio ABC dviejų viršūnių A ir B bei pusiaukraštinių susikirtimo taško O koordinatės: $A(4; 1)$, $B(3; -2)$, $O(0; 2)$. Raskite trečiosios trikampio viršūnės C koordinates.

17. Žinomos trikampio ABC viršūnių koordinates: $A(1; 1)$, $B(0; 3)$, $C(-1; -1)$. Raskite vektoriaus $\overrightarrow{OC_1}$ koordinates, kur O — trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taškas ir C_1 — atkarpos AB vidurys.

18. Žinomos trikampio ABC viršūnių koordinatės: $A(-1; 2)$, $B(2; 6)$, $C(4; 14)$. AD — trikampio pusiaukraštinė. Apskaičiuokite: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$, $|\overrightarrow{AD}|$.

19. Įrodykite, kad trikampyje ABC, kai $A(-2; 2)$, $B(2; 5)$, $C(-1; 9)$, teisinga lygybė $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2$.

20. Duotos trys iš eilės einančios lygiagretainio viršūnės $A(2; 3; 2)$, $B(0; 2; 4)$, $C(4; 1; 0)$. Raskite jo ketvirtosios viršūnės D koordinates.

21. Apskaičiuokite vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinę sandaugą, kai $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3\sqrt{2}$, o kampas tarp vektorių:

a) $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 45°$;

b) $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 135°$.

22. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ sudaro $120°$ kampą, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$. Apskaičiuokite:

a) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$;

b) $(\vec{a} + 2\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$.

23. Duoti vektoriai $\vec{a}(3; -1)$ ir $\vec{b}(-1; 1)$. Raskite kampą tarp vektorių $\vec{a} + \vec{b}$ ir $2\vec{b}$.

24. Duoti vektoriai $\vec{a}(3; -\sqrt{3})$ ir $\vec{b}(1; -\sqrt{3})$. Raskite kampą tarp vektorių $\vec{a} - \vec{b}$ ir $0{,}5\vec{b}$.

25. Raskite vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinę sandaugą:

a) $\vec{a}(0{,}2; 0{,}3)$, $\vec{b}(0{,}4; -0{,}2)$;

b) $\vec{a}(0; -5; 8)$, $\vec{b}(3; -1; -1)$.

26. Raskite kampą tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$:

a) $\vec{a}(5; 5)$, $\vec{b}(0; 5)$;

b) $\vec{a}(10; -10; 5)$, $\vec{b} = -20\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$.

27. Ar statmeni vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, kai:

a) $\vec{a}(-3{,}5; -1{,}5)$, $\vec{b} = \overrightarrow{MN}$, $M(-1; 0{,}5)$, $N(0; -2)$;

b) $\vec{a}(-3; -6; 4)$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $A(0; 1; 3)$, $C(6; -2; 3)$?

28. Raskite vektorių $\vec{a}$, kolinearų vektoriui $\vec{b}(1; 2; 2)$ ir tenkinantį sąlygą $\vec{a} \cdot \vec{b} = 27$.

29. Su kuria x reikšme vektoriai $\vec{a}(-4; -4x; 8)$ ir $\vec{b}(-4x; -12; 16)$ yra statmeni?

30. Vektorius $\vec{p}$, statmenas vektoriams $\vec{a}(3; 2; 2)$ ir $\vec{b}(18; -22; -5)$, su Oy ašimi sudaro buką kampą. Raskite vektoriaus $\vec{p}$ koordinates, jei $|\vec{p}| = 14$.

Kartojimo medžiagos uždavinių atsakymai

1. Skaičiai ir reiškiniai

1. 72.
2. 5252.
3. a) $0,(6)$; b) $0,(4)$; c) $0,(18)$; d) $0,(27)$; e) $0,1(6)$; f) $0,(571428)$; g) $0,(714285)$.
4. a) $\frac{5}{9}$; b) $\frac{23}{90}$; c) $\frac{47}{90}$; d) $\frac{111}{900}$.
5. a) 2,5; b) $1\frac{1}{34}$; c) 100; d) 1.
9. a) 8; b) 6; c) $-\sqrt{5}$; d) $-\sqrt{7}$.
10. a) 2; b) -7; c) 3; d) 5; e) 2; f) 1,5.
11. a) $5ab$; b) $1-\frac{x}{2}$.
12. a) $6{,}25\cdot 10^4$; b) $1{,}5024\cdot 10^8$; c) $\approx -3{,}56\cdot 10^{-15}$; d) $-2{,}625\cdot 10^{17}$.

2. Lygtys ir nelygybės

1. a) $a\neq 2$; b) $a\neq -2$; c) $a\leqslant 4$; d) $a\geqslant -2$.
2. a) $p=0$; b) $p=-1{,}5$; c) $p>\frac{1}{6}$; d) $p\in(-4;4)$.
3. a) Taip; b) ne; c) ne; d) taip.
4. a) -2; $\frac{1}{3}$; b) -5; c) -1; d) 0,5.
5. a) $\pm\frac{2}{3}$; ± 1; b) $\varnothing$; c) $\pm\frac{\sqrt{19}}{2}$; $\pm\sqrt{3}$; d) -2; 1; e) -2; f) 1.
6. a) -1; $2\frac{1}{3}$; b) -1; 2; c) $-0{,}3$; d) $-\frac{3}{4}$; 1; e) -1; f) $\varnothing$.
7. a) 5; b) 3.
8. a) -1; b) -3.
9. a) ± 2; b) 9; c) 0; d) -1; e) 4; f) 3; g) ± 7; h) $\varnothing$; i) $\varnothing$; j) $\varnothing$.
10. a) $(-\infty;-2)\cup(1;7]$; b) $(-\infty;-1)\cup(0;\frac{1}{2})\cup(1;+\infty)$; c) $(-\infty;-5)\cup(4;27]$; d) $[-4;-1)\cup(-1;2]$; e) $(-\infty;-\frac{8}{3}]\cup[\frac{6}{7};+\infty)$; f) $\{-3\}\cup[3\sqrt{2}-3;+\infty)$.
11. a) -5; b) 0.
12. a) 3; b) -6.
13. a) Taip; b) ne; c) ne; d) taip.
14. a) $[1;2)\cup(3;4]$; b) $(-\infty;-1]\cup[2;3)\cup(5;+\infty)$.
15. a) 1; b) -3.
16. a) $(4;1)$, $(-\frac{2}{3};\frac{10}{3})$; b) $(1;5)$, $(5;1)$; c) $(3;5)$, $(-3;-5)$, $(5;3)$, $(-5;-3)$; d) $(\frac{1}{2};\frac{11}{2})$, $(\frac{3}{2};\frac{11}{2})$.
17. 2 h;
18. 8 detales.
19. 4 km/h ir 10 km/h.
20. 150 g ir 450 g.

3. Funkcijos sąvoka

1. $f(x) = -8$.

2. a) $x > \frac{4}{5}$;
b) $x < \frac{12}{11}$.

3. a) $-6 < x < \frac{1}{2}$;
b) $\frac{3}{4} < x < \frac{3}{2}$.

4. a) (3; 0);
b) (7; 20), (1; 2).

5. a) $x > 1$;
b) $x > 1$;
c) $x \neq 2$;
d) $x \neq 3$;
e) $(-\infty; -1) \cup [3; 5]$;
f) $[3; 5]$;
g) $x \geqslant 2$;
h) $(2; 3)$.

6. a) 6; 12; 18;
b) 10; $\sqrt{89}$.

7. a) $E_f = [-6\frac{1}{4}; +\infty)$;
b) $E_f = (-\infty; 1]$;
c) $E_f = [-4\frac{1}{12}; +\infty)$;
d) $E_f = (-\infty; 3\frac{1}{16}]$.

8. a) Atvirkštinė $g(x) = -2x + 8$;
b) atvirkštinė $g(x) = -\sqrt{x-4}$ $(x \geqslant 4)$;
c) atvirkštinė $g(x) = \frac{3}{2} + \frac{x^2}{2}$ $(x > 0)$;
d) atvirkštinė $g(x) = -2 + \frac{3}{x}$ $(x \neq 0)$.

9. a) **B**;
b) **D**.

10. a) $D_f = D_g = D_h = (-\infty; +\infty)$;
$E_f = [-1\frac{1}{8}; +\infty)$; $E_g = [-1; +\infty)$; $E_h = (-\infty; 9]$;
b) funkcija f: $x_{\min} = \frac{1}{4}$, $f(\frac{1}{4}) = -1\frac{1}{8}$;
funkcija g: $x_{\min} = -3$, $g(-3) = -1$;
funkcija h: $x_{\max} = 2$, $f(2) = 9$;
c) $x = \frac{1}{4}$, $x = -3$, $x = 2$;
d) $f(x) < 0$, kai $x \in (-\frac{1}{2}; 1)$; $f(x) > 0$, kai $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$; $g(x) < 0$, kai $x \in (-4; -2)$; $g(x) > 0$, kai $x \in (-\infty; -4) \cup (-2; +\infty)$; $h(x) < 0$, kai $x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$; $h(x) > 0$, kai $x \in (-1; 5)$.

11. Atstumas iki Ox lygus 4; iki Oy lygus 3; iki koordinačių pradžios taško lygus 5.

13. a) $(-\infty; 2) \cup (8; +\infty)$;
b) $(\frac{7}{8}; 2) \cup (2; +\infty)$.

14. a) $(1; 3) \cup (3; 8)$;
b) $(-\infty; -2)$.

15. a) Lyginė;
b) nelyginė;
c) nelyginė;
d) lyginė.

16. a) $E_f = \{-\frac{2}{5}, 0\}$;
b) $E_g = \{0, \frac{2}{3}\}$.

17. b) Didėjimo intervalai: $(-\infty; 0)$, $(1; 2)$; mažėjimo intervalai: $(0; 1)$, $(2; +\infty)$.

18. b) Didėjimo intervalai: $(-1; -\frac{1}{2})$, $(0; +\infty)$; mažėjimo intervalai: $(-\infty; -1)$, $(-\frac{1}{2}; 0)$.

19. a) $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $E_f = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;
d) lygtis turi tris sprendinius, vienas iš jų yra skaičius 1;
e) nelygybės sprendiniai sudaro intervalą $(0; 1]$.

20. a) $f(-2) < f(3)$; $g(-2) < g(3)$; $g(-1) < f(1)$; $g(0) = f(0)$;
b) A nepriklauso grafikams; B priklauso ir f, ir g grafikams; C priklauso g grafikui; D ir E nepriklauso grafikams; G priklauso g grafikui; H priklauso f grafikui;
e) funkcija $h(x) = \sqrt[3]{3x}$ yra funkcijos $f(x)$ atvirkštinė, o funkcija $k(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{3}x}$ yra funkcijos $g(x)$ atvirkštinė.

21. a) $D_h = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $E_h = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;
d) lygtis turi vieną sprendinį;
e) nelygybės sprendiniai: $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

22. a) $D_f = (-\infty; \infty)$; $E_f = [-4; +\infty)$;
b) funkcija teigiama intervaluose $(-\infty; -3)$, $(1; +\infty)$;
c) funkcijos mažėjimo intervalas $(-\infty; -1)$, didėjimo — $(-1; +\infty)$.

23. a) $D_g = (-\infty; \infty)$; $E_f = (-\infty; \frac{49}{4})$;
b) funkcija neteigiama intervaluose $(-\infty; -4]$, $[3; +\infty)$;
c) funkcijos mažėjimo intervalas $(-\frac{1}{2}; +\infty)$, didėjimo — $(-\infty; -\frac{1}{2})$.

24. a) Sprendinių aibė $[3; 4)$;
b) $\varnothing$;
c) $x = \frac{5+m}{3}$, $m \in \boldsymbol{Z}$;
d) sprendinių aibė $[1,5; 2,5)$.

25. a) $\{x + 1\} = \{x + 3\}$;
b) $\{x - 10\} = \{x + 5\}$;
c) $[x + 3] = [x + 1] + 2$;
d) $[x + 5] = [x - 5] + 10$.

26. a) Funkcijos grafikas yra tiesė, nes $f(x) = x$;
b) funkcijos grafikas sutampa su abscisių ašimi.

4. Laipsninė funkcija

1. E.
2. C.
3. D.
4. D.
5. C.
6. B.
7. a) $x = 1$; b) $x = 1$.
8. $a = 3$; $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_4 = \sqrt{2}$.
9. a) Nekerta; b) nekerta; c) kerta taške (20; 0); d) nekerta.
10. a) -6; 7; b) -7; 8; c) $1 - \sqrt{2}$; 2; 3; d) $-1 + \sqrt{5}$; -2; -5.
11. a) $D_f = [-4; 2) \cup (2; 4]$;
b) $D_f = [-4; 1]$;
c) $D_f = (-\infty; 0) \cup [10; +\infty)$;
d) $D_f = (-\infty; -1) \cup \{2\} \cup (7; +\infty)$;
e) $D_f = (-\infty; +\infty)$;
f) $D_f = (-\infty; 1) \cup (1; 2{,}5) \cup (2{,}5; +\infty)$.

5. Rodiklinė funkcija

1. a) Mažėjanti; b) didėjanti; c) mažėjanti; d) mažėjanti; e) didėjanti; f) didėjanti.
2. a) $D_f = (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$; b) $D_f = [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$;
c) $D_f = (-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$; d) $D_f = [2; 7]$.
3. a) $E_f = (0; 3]$; b) $E_f = (0; \frac{1}{2}]$;
c) $E_f = [\frac{1}{2}; +\infty)$; d) $E_f = (0; \frac{1}{3}]$.
4. a) 2; b) 81.
5. a) $x = -\frac{4}{3}$; b) $x = 7$; c) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{2}$;
d) $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = \sqrt{2}$;
e) $x_1 = 0$, $x_2 = -1$; f) $x = 4$.
6. a) $x = 3$; b) $x = 3$; c) $x = 2$; d) $x = 3$; e) $x = \frac{1}{2}$; f) $x = -2$.
7. a) $-\frac{3}{2}$; b) 16; c) 0; d) 0.
8. a) $(-\infty; 1) \cup (2; 5)$; b) $(2; 3) \cup (5; +\infty)$;
c) $(2; 4) \cup (4; 5)$; d) $(-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (5; +\infty)$;
e) $(-\infty; 2) \cup (7; +\infty)$; f) $(-\infty; 1) \cup (9; +\infty)$.
9. a) $[-3; 2]$; b) $(-\infty; 0) \cup (\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$; c) $(1; 5)$; d) $(1; 7)$; e) $(0; 1)$;
f) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.
10. a) Mažiausioji reikšmė $\frac{1}{3}$, didžiausioji reikšmė 27; b) $x = 2$, $y = 9$;
c) $x = 0$, $x = 2$; d) $(-\infty; -9] \cup [9; +\infty)$.

6. Logaritminė funkcija

1. a) 1; b) $\frac{5}{2}$; c) $\frac{5}{2}$; d) 1999; e) 2; f) 7; g) 1; h) -2.

2. a) $\lg\sqrt{3} < \lg 2$;
b) $\lg\frac{3}{11} < \lg\frac{2}{3}$;
c) $\lg 3 < \lg\sqrt[3]{30}$;
d) $\log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_2\frac{1}{2}$;
e) $\log_{0,1} 4 < \log_{0,1}\sqrt{15}$;
f) $\log_{0,3}\frac{1}{3} < \log_{0,3}\sqrt{0,3}$.

3. 1) **D**; 2) **B**; 3) **C**; 4) **B**; 5) **D**; 6) **A**.

4. a) $(1; 2) \cup (2; 7]$; b) $(-1; 0) \cup (0; 3)$; c) $(1; 2) \cup (2; 5) \cup (5; 10]$;
d) $(-1; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 9]$; e) $(-\infty; -1) \cup [2; +\infty)$; f) $(\frac{1}{3}; 2]$.

5. a) $x_1 = 8$, $x_2 = 13$; b) $x_1 = 18$, $x_2 = 12$; c) $x = 100\sqrt{10}$;
d) $x_1 = 100$, $x_2 = 1000$.

6. a) $x = 3$; b) $x = 2$; c) $x = 3$; d) $x = 2$.

7. a) $x_1 = 2$, $x_2 = 6$; b) $x_1 = 100$, $x_2 = \frac{1}{100}$; c) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; d) $x = 10$.

8. a) $x_1 = 9$, $x_2 = \frac{1}{81}$; b) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$; c) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$;
d) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$; e) $x = 10$; f) $x = \frac{1}{1000}$.

9. a) $x = 5^5$; b) $x = 2$; c) $x = \sqrt{3}$; d) $x_1 = 9$, $x_2 = \frac{1}{9}$.

10. a) $x_1 = 10$, $x_2 = \frac{1}{100}$; b) $x_1 = 100$, $x_2 = \frac{1}{10}$; c) $x_1 = 10$, $x_2 = 1000$;
d) $x_1 = 10$, $x_2 = \frac{1}{100}$.

11. a) $x = 10$; b) $x = \frac{1}{10}$; c) $x = 10$; d) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

12. a) 5; b) -9; c) 0; d) $10^{-\frac{9}{2}}$.

14. a) $x = 100$, $y = 10$; b) $x_1 = 10$, $y_1 = 1000$; $x_2 = 1000$, $y_2 = 10$;
c) $x = 8$, $y = 2$; d) $x = 8$, $y = 1$.

15. a) $x < \frac{1}{4}$; b) $2 \leqslant x < \frac{7}{3}$; c) $-2 < x < 7$; d) $3 < x \leqslant 11$;
e) $1 < x < 2$ ir $3 < x < 4$; f) $-2 < x < \frac{4}{3}$, $x \neq 0$.

16. a) $x < \frac{1}{3}$; b) $x < -\frac{2}{3}$ ir $x > 1$; c) $x > \frac{3}{4}$; d) $x > \frac{2}{3}$; e) $4 < x < 10$;
f) $-3 < x < -\sqrt{6}$ ir $\sqrt{6} < x < 3$.

17. a) $1 < x < \sqrt{10}$; b) $0 < x < 10$ ir $x > 100$.

18. a) $D_f = (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (2; +\infty)$;
c) $x = -\frac{3}{4}$;
d) $2 < x \leqslant 3$;
e) $-1 < x < -\frac{1}{2}$ ir $2 < x < \frac{5}{2}$.

19. 1) $D_f = (0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 2) \cup (2; +\infty)$; 2) $x = \frac{1}{\sqrt[3]{32}}$;
3) $f(x) < 0$, kai $\frac{1}{\sqrt[3]{32}} < x < \frac{1}{2}$ ir $x > 2$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt[5]{8}}$.

20. a) $a = \frac{289}{27} \approx 10{,}704$; $b \approx 0{,}064$;
b) apie 34 cm ilgio žuvų;
c) 37 cm ilgio žuvų ir ilgesnių.

7. Trigonometrinės funkcijos

1. 1) C; 2) E; 3) B; 4) B. **2.** a) $\frac{7}{25}$; b) -16.

3. a) $[-2; -\frac{\pi}{2}) \cup (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; 2]$; b) $[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; c) $[-4; \pi) \cup (-\pi; 0)$; d) $[2; \frac{5}{2}] \cup [3; 4]$.

4. a) Didžiausia reikšmė 8, mažiausia 2; b) didžiausios reikšmės nėra, mažiausia reikšmė -10; c) didžiausia reikšmė $2-\sqrt{3}$, mažiausia $-2-\sqrt{3}$; d) didžiausia reikšmė 0,8, mažiausia reikšmė $-1{,}2$; e) didžiausia reikšmė $\frac{3\pi}{2}$, mažiausia $-\frac{3\pi}{2}$; f) didžiausia reikšmė 2, mažiausia 1.

5. a) 0; b) 0; c) 1; d) $\frac{1}{\cos\alpha}$. **6.** a) $-1-\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) 1; d) $-1-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. a) $\operatorname{tg}\alpha$; b) $4\cos^2\frac{\alpha}{2}$; c) 1; d) $\sqrt{3}\sin(2\alpha)$; e) 1; f) 0.

8. a) Neturi sprendinių; b) turi sprendinių; c) turi sprendinių; d) turi sprendinių; e) turi sprendinių; f) turi sprendinių.

10. a) $x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; b) $x = \pm\frac{9\pi}{4} + 6n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; c) lygtis neturi sprendinių; d) lygtis neturi sprendinių; e) $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; f) $x = \frac{5\pi}{3} + \frac{5n\pi}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; g) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2} + 3n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; h) $x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

11. a) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\operatorname{arctg} 2}{3} + \frac{n\pi}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
b) $x = \frac{3\pi}{4} + 3n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = 3\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 3n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
c) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2n\pi}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pi + 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
d) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{20} + \frac{n\pi}{10}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

12. a) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; b) $x = \pi + 4n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = 4\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + 4n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; c) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; d) $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

13. a) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{6}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pm\frac{\pi - \arccos\frac{1}{6}}{6} + \frac{n\pi}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; b) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; c) $x = \frac{5\pi}{8} + \frac{5n\pi}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; d) $x = \pm\frac{\pi}{2} + 3n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

14. a) $x = \frac{n\pi}{3}$, $x = n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; b) $x = 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; c) $x = \frac{\pi}{20} + \frac{n\pi}{10}$, $x = \frac{n\pi}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; d) $x = \frac{5n\pi}{8}$, $x = \frac{5n\pi}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

15. a) $x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \frac{n\pi}{2}$; b) $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$, $x = \operatorname{arctg}(3\sqrt{3}) + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
c) $x = -\frac{3\pi}{4} + 3n\pi$, $x = 3\operatorname{arctg}\frac{2}{5} + 3n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; d) $x = -\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{2}}{4} + \frac{n\pi}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

16. a) $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2n\pi}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; b) $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; c) lygtis sprendinių neturi; d) lygtis sprendinių neturi; e) lygtis sprendinių neturi; f) lygtis sprendinių neturi. **17.** a) $x = 2, 4, \dots, 48$; b) $x = 1, 3, \dots, 23$.

18. a) $\frac{\pi}{3} + n\pi < x < \frac{7\pi}{6} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; b) $-\frac{4\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
c) $-\frac{3\pi}{2} + 3n\pi < x < \pi + 3n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; d) $\frac{3n\pi}{2} < x < \frac{8\pi}{3} + 4n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
e) $-\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $x \neq \frac{n\pi}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; f) $-\pi + 2n\pi < x < 2n\pi$, $x \neq n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; g) $-\frac{\pi}{12} + \frac{2n\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{18} + \frac{2n\pi}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

19. 1) $-\frac{1}{4}$; 2) $D_f = (-\infty; \infty)$; $E_f = [-1; 2]$; 3) $x = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$; 5) 4 sprendinius.

20. a) $f(\pi - x) = f(x)$; $f(\pi + x) = \frac{1+\sin x}{\sin x}$; b) $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$;
c) $f(-\frac{\pi}{2}) = 2$; $f(-\frac{\pi}{2}) < f(-\frac{\pi}{3})$; d) $m = 3$.

8. Sekos

1. a) $-1, -1, 1, 5, 11$; b) $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9$; c) $0, 3, 2, 5, 4$; d) $4\frac{1}{2}, 4, 6, 0, 12$; e) $1, 0, -1, 0, 1$; f) $0, 1, 0, -1, 0$.

2. a) $-3, -1, -9, -3$; b) $256, 4, 1, 0$.

3. a) Kai $n \geqslant 11$; b) kai $n \geqslant 4$.

4. a) 104; b) 211; c) 21; d) 28.

5. a) Taip; $n = 25$; b) ne; c) taip; $n = 26$; d) taip; $n = 18$; e) ne; f) taip; $n = 38$.

6. a) 1; b) 3.

7. a) 32; b) 85.

8. a) 1) 5, 9, 13, 17, 21; 2) $a_{10} = 41$; 3) $a_n = 5 + 4(n-1)$; b) 1) 1, 9, 17, 25, 33; 2) $a_{10} = 73$; 3) $a_n = 1 + 8(n-1)$.

9. a)

−5	0	5	10
0	5	10	15
5	10	15	20
10	15	20	25

b)

1	1,5	2	2,5
1,5	2	2,5	3
2	2,5	3	3,5
2,5	3	3,5	4

10. 3 km/h.

11. Po 7 s.

12. a) $\approx 43\,°C$; b) 2700 m.

13. a) 41; b) 195; c) 25; d) 9.

14. 11.

15. a) Taip; $n = 6$; b) taip; $n = 7$; c) taip; $n = 7$; d) taip; $n = 6$; e) ne; f) ne.

16. a) $-\frac{1}{2}$; -1; -2; -4; -8; -16; b) 20; 10; 5; 2,5; 1,25; 0,625.

17. a) $y_1 = 480$; $S_5 = 930$; b) $y_1 = 6$; $S_5 = 726$.

20. 121.

21. $195 = 15 + 45 + 135$.

22. 54; 18; 6; 2 arba 27; -9; 3; -1.

23. $b_1 = 5$, $q = 3$.

24. $b_1 = 0{,}001$.

25. a) 2; $2\sqrt{2}$; 4; c) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$; d) $\sqrt{7}$.

26. 12; 8; 4; 2 arba $\frac{3}{2}$; $\frac{9}{2}$; $\frac{15}{2}$; $\frac{25}{2}$.

27. 3; 5; 7.

28. 5; 10; 20.

29. a) $b_1 = 144$; $q = \frac{1}{4}$; b) $b_1 = 54$; $q = \frac{1}{3}$.

30. a) $2\frac{2}{3}$; b) $8\frac{1}{3}$; c) $\frac{5\sqrt{5}}{4}$; d) $\frac{3\sqrt{3}+5}{2}$.

31. a) $9\frac{23}{33}$; b) $3\frac{5}{9}$; c) $\frac{989}{319}$; d) $\frac{166}{615}$.

32. a) 1) aritmetinė; 2) 21; 3) 640,5;
b) 1) aritmetinė; 2) 13; 3) -832;
c) 1) geometrinė; 2) 7; 3) 5461;
d) 1) aritmetinė; 2) 22; 3) 1270,5.

33. a) 195; b) 357.

34. 1) C; 2) E; 3) C; 4) C; 5) E.

9. Funkcijų išvestinės

1. b) $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2\frac{1}{2}$.
2. b) $f(x) = -x^2 - x - 3$.
3. a) 12; b) 4.
4. (0; 2).
5. $(-\infty; 0) \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$.
6. $(-\infty; -\frac{8}{3}) \cup (0; +\infty)$.
7. a) 0; b) 0.
8. a) $(-\infty; -2) \cup [0; 4]$; b) $(-\infty; -6] \cup [0; 1)$.
9. a) $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$; b) $(-\frac{1}{2}; +\infty)$.
10. $f(\frac{2\pi}{3}) = \sqrt{3}$.
11. $f(\frac{4\pi}{3}) = \sqrt{3}$.
12. 1) $y = -\frac{2}{3}x + 2$; 2) $f'(x) = -\frac{2}{3}$; 3) $S = 5\frac{1}{3}$.
13. a) $S(t) = 2t^2$; b) $10\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$; c) $2(t_1 + t_2)\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$.
14. a) $v_0 = 98\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $a = -9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; b) $v(10) = 0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; c) $t = 10\,\text{s}$; d) $t = 20\,\text{s}$;
e) $v(20) = 98\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
15. b) $\rho(A) = 4$; c) $\rho(B) = 204$; d) $\rho(C) = 44$; e) $m(50) = 5200\,\text{g}$; f) $\rho_{\text{vid}} = 104$;
g) $l = 25$.
16. a) 10 min; b) $200\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$; c) $5\ \frac{\text{km}}{\text{min}} = 300\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
17. a) 18 m; b) $8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; c) $t = 3\,\text{s}$; d) $|v(10)| = 40\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
18. (1; 5).
19. (1; 4).
20. Taip, taške $(-1; 1)$.
21. b) $d = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
22. b) $a = -1$.
23. b) $a = \frac{5}{4}$.
24. b) $S = 1{,}5$.
25. b) $y = x + 8$; c) $(-8; 0)$, $(0; 8)$.
26. a) $D_f = (-\infty; +\infty)$, $E_f = [\frac{\sqrt{35}}{2}; +\infty)$; b) $y = \frac{1}{6}x + 2\frac{5}{6}$; c) $(0; 2\frac{5}{6})$, $(-17; 0)$.
27. $a = -2$.
28. $a = 2$.
29. a) $y = 0$, $y = 1$, $y = x$.
30. a) $y = \pi - x$, $y = -1$, $y = \frac{\pi^2}{4}$.
31. b) $x_0 = 0$, $y = 6x + 2$.
32. b) $x_0 = 0$, $y = -4x - 8$.
33. $d = 2\sqrt{2}$.
34. b) $y = -9x + 6$; c) 4.
35. a) $D_f = (1; +\infty)$, $E_f = (-\infty; +\infty)$; c) $y = x - 2$, $y = x + 2$.
36. a) $D_f = [1; +\infty)$, $E_f = [a; +\infty)$; c) $a = \frac{3}{4}$.
37. -2; 2.
38. a) $a(t) = -4e^{-2t}(t^2 - t - 6)$; b) $v(3) \approx 12{,}015\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

10. Funkcijų tyrimas

3. $D_f = [0; 4]$.

4. $(-\infty; \frac{1}{2}\ln 3)$.

5. $(-\infty; -\frac{1}{3}\ln 2)$.

6. $f(x) = x^5$.

8. Didėjimo intervalai: $(-\infty; -6)$, $(0; +\infty)$;
mažėjimo intervalai: $(-6; -3)$, $(-3; 0)$.

9. Didėja.

10. Didėja.

11. a) Didėja $(-\infty; -2\frac{1}{2})$, mažėja $(-2\frac{1}{2}; +\infty)$;
b) didėja $(0; \frac{4}{15})$, mažėja $(-\infty; 0)$ ir $(\frac{4}{15}; \frac{1}{3})$;
c) didėja $(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$, mažėja $(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ir $(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1)$.

12. Pavyzdžiui, $a = -1$, $a = 0$, $a = 1$.

13. $f(-2) = 2$.

14. $f(-1) = 11$ (maksimumas), $f(1) = -13$ (minimumas).

15. b) $a = 1$.

16. $(1; 1)$, 2.

17. $2\sqrt{2}$.

18. $-2\sqrt{2}$.

19. b) $(2; 0)$.

20. b) $4\frac{1}{4}$ m, $5\frac{1}{4}$ m, $10\frac{1}{2}$ m; c) $53{,}125\,\text{m}^2$; d) $50\,\text{m}^2$.

21. a) $c(1 + \sqrt{2})$;
b) 45°, 45°, 90°.

22. b) $\sqrt{2}h$, $\sqrt{2}h$; c) $S = h^2$.

23. b) $h = 2(\sqrt{2} - 1)$.

24. a) $h = r\sin(2\alpha)$, $a = 2r - 4r\cos^2\alpha$;
c) $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $S(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$.

25. b) $\frac{3}{4}$, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; c) $y = \sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$.

26. b) $x = 6$, $h = 2$.

27. a) $AC = \sqrt{52 - 48\cos\alpha}$; c) $\alpha = 135^\circ$.

28. b) $R = H = x = \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$.

29. b) $r = 8$; $h = 4$; $2 : 1$; c) 256π; e) $r = 6$; $h = 6$; $1 : 1$; f) 72π.

30. b) $h = 2\sqrt{3}\,\text{m}$; c) $87{,}062\,\text{m}^3$.

31. b) $r = 4\,\text{cm}$, $h = 2\,\text{cm}$;
d) $r = 3\,\text{cm}$, $h = 3\,\text{cm}$.

32. b) $h = \frac{4R}{3}$; c) $\frac{32}{81}\pi R^3$; d) $35^\circ 16'$.

33. c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

34. b) $x = h$.

35. b) $x = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \approx 0{,}526R$;
c) $\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \approx 32^\circ$.

11. Integralai

1. $y = -x^2 + x + 2$.
2. $y = -2x^2 + 2x + 6$.
3. a) 2; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $\int\limits_0^2 e^{3x}\,dx$.
4. b) $7\frac{11}{15}$.
5. a) $f(x) = 2(x-2)^2$; b) $f'(x) = 4(x-2)$; c) $S = \frac{8}{3}$.
6. a) $y = 2 - 2(x-1)^2$; b) $\frac{2}{3}$.
7. a) $y = 4x$, $y = -4x$; b) $\frac{16}{3}$; c) 16; $\frac{1}{3}$ dalį.
8. a) $y = x - \frac{4}{5}$, $y = x + \frac{4}{5}$; b) $\frac{1}{15}$.
9. b) $S = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$.
10. b) $S = 2 - \frac{\pi}{2}$.
11. b) $a = -1$; c) yra simetriška $x = 1$ atžvilgiu.
12. a) $\frac{5}{12}$; b) $\frac{2}{5}\pi$.
13. a) $\frac{5}{12}$; b) $\frac{5}{14}\pi$.

12. Įvykių tikimybės

1. $\frac{1}{2}$.
2. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{6}$.
3. a) $\frac{10}{21}$; b) $\frac{10}{21}$; c) $\frac{1}{21}$.
4. 0,01.
5. $\frac{31}{105}$.
6. 0,441.
7. $\frac{7}{16}$.
8. $\frac{C_{16}^{8} \cdot C_4^2}{C_{20}^{10}} \approx 0{,}418$.
9. $\frac{40}{77}$.
10. a) 0,765; b) 0,985.
11. a) 0,388; b) 0,329; c) 0,056; d) 0,003.
12. $\frac{1}{3}$.
13. 0,5.
14. a) 0,03; b) 0,27.

13. Atsitiktiniai dydžiai ir statistika

1. a) $e_1 = \{1b, 2b, 3j\}$, $e_2 = \{1b, 2b, 4j\}$, $e_3 = \{1b, 2b, 5j\}$, $e_4 = \{1b, 3j, 4j\}$, $e_5 = \{1b, 3j, 5j\}$, $e_6 = \{1b, 4j, 5j\}$, $e_7 = \{2b, 3j, 4j\}$, $e_8 = \{2b, 3j, 5j\}$, $e_9 = \{2b, 4j, 5j\}$, $e_{10} = \{3j, 4j, 5j\}$; čia laikome, kad rutuliai sunumeruoti taip: 1 — baltas, 2 — baltas, 3 — juodas, 4 — juodas, 5 — juodas;

b) $X(e_1) = X(e_2) = X(e_3) = 1$, $X(e_4) = X(e_5) = X(e_6) = X(e_7) = X(e_8) = X(e_9) = 2$, $X(e_{10}) = 3$;

c)

$m =$	1	2	3
$\mathbf{P}(X = m) =$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

d) $\mathbf{E}X = 1{,}8$, $\mathbf{D}X = 0{,}36$, $\sigma(X) = 0{,}6$.

2. a)

$m =$	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X = m) =$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

b) $\mathbf{E}X = \frac{3}{4}$, $\mathbf{D}X = \frac{9}{16}$, $\sigma(x) = \frac{3}{4}$.

3. a) $0{,}9^{10} \approx 0{,}349$; b) $0{,}9^9 \approx 0{,}387$; c) $\approx 0{,}0015$.

4. a) $x = 0{,}6$, $y = 0{,}1$; b) $\mathbf{D}X = 0{,}84$, $\sigma(X) \approx 0{,}92$.

5. a) $x = 0{,}1$, $y = 0{,}7$; b) $0{,}1$.

6. a)

$m =$	-2	2	5
$\mathbf{P}(X = m) =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$m =$	-1	2	5
$\mathbf{P}(Y = m) =$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

b)

X / Y	-2	2	5
-1	$\frac{15}{48}$	$\frac{10}{48}$	$\frac{5}{48}$
2	$\frac{6}{48}$	$\frac{4}{48}$	$\frac{2}{48}$
5	$\frac{3}{48}$	$\frac{2}{48}$	$\frac{1}{48}$

c) $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = 0{,}5$;

d) $\sigma(X) \approx 2{,}69$, $\sigma(Y) \approx 2{,}12$;

e) tas, kuris lošia prie dėžės su rutuliais.

7. Pomidorų kainos imtis turi tris modas: 1,2; 1,3 ir 1,4. $Q_1 = 1{,}1$, $Q_2 = 1{,}3$, $Q_3 = 1{,}4$. $\bar{p} \approx 1{,}33$, $\bar{a} \approx 0{,}88$, $s_p = 0{,}53$, $s_a \approx 0{,}234$, $r \approx 0{,}46$. Agurkų kainos imties moda lygi 1,0. $Q_1 = 0{,}7$, $Q_2 = 0{,}9$, $Q_3 = 1{,}0$.

14. Planimetrija

1. $\approx 170\,\text{cm}^2$.
2. $5\frac{7}{13}$.
3. $28{,}125\,\text{cm}^2$.
5. $4\sqrt{2}\,\text{m}$.
6. a) 8; b) 16,25.
7. b) $r^2 + 2Rr$.
8. $4 + 2\sqrt{29}$.
9. 8 ir 25.
10. 80 cm arba 90 cm.
11. $\frac{5}{2}(3 + \sqrt{3})$.
12. a) 7; b) 17,5.
13. 36 cm; $54\,\text{cm}^2$.
14. 48.
15. 288.
16. $75\,\text{cm}^2$.
17. $150\,\text{cm}^2$.
18. $24\,\text{cm}^2$.
19. $169\pi\,\text{cm}^2$.
21. a) 20; b) 400; c) 100π; d) $20\sqrt{2}\pi$.
22. 12.
23. 4 cm ir $4\sqrt{3}\,\text{cm}$.
24. 3.
25. a) 35; $5\sqrt{97}$; b) $300\sqrt{3}$.
26. 4 dm, 5 dm.
27. 26.
28. $50\,\text{cm}^2$.
29. 78.
30. *Nurodymas*. Dviem būdais apskaičiuokite rombo plotą.
31. 960.
32. $76{,}8\,\text{cm}^2$.
33. 144.
34. 2.
35. 18 cm.
36. 135,2 ir 811,2.
37. 136 cm.
38. 16.
39. $135\,\text{cm}^2$.
40. a) 15,6; b) 46,8.

15. Stereometrija

1. a) $128\sqrt{2}\,\text{cm}^2$; b) $768\,\text{cm}^2$; c) $1024\sqrt{2}\,\text{cm}^3$.
2. 5 ir 12.
4. $15\frac{5}{8}\,\text{cm}^3$.
5. $12{,}15\sqrt{2}$.
6. 120.
7. $24 + 8\sqrt{2}$.
8. $24 + 14\sqrt{3}$.
9. $1458\,\text{cm}^3$.
10. a) $\approx 145\,\text{cm}^2$; b) $\approx 111\,\text{cm}^3$.
11. a) $441\sqrt{3}\,\text{cm}^2$; b) $3087\,\text{cm}^3$.
12. a) 48; b) $12\sqrt{7}$.
13. $5\sqrt{5}$.
14. $66\frac{2}{3}\,\text{cm}^3$.
15. $140\frac{5}{6}\,\text{cm}^3$.
16. a) $256 + 136\sqrt{3}$; b) $\frac{784\sqrt{3}}{3}$.
17. 600π arba 1440π.
18. 12π.
19. a) $6\sqrt{2}\,\text{cm}$; b) $144\sqrt{2}\pi\,\text{cm}^2$; c) $882\pi\,\text{cm}^3$.
20. π kartų.
21. 8 cm.
22. 14 cm.

16. Vektoriai

1. a) 10 cm; b) 14 cm.
2. a) $\sqrt{3}$; b) 1.
3. a) $\vec{b}+\vec{a}$; b) $\vec{b}-3\vec{a}$.
4. $-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}$.
5. $3\overrightarrow{CB}$.
6. *Nurodymas* Remkitės stačiakampio įstrižainių lygybe.
7. $m+1$.
8. $2\vec{b}-\vec{a}$.
9. $\sqrt{a^2+b^2}$.
10. $\overrightarrow{KL}=-\frac{1}{5}\overrightarrow{BL}$.
11. a) $\overrightarrow{AB}(-1;2)$, $\overrightarrow{BC}(-1;-4)$, $\overrightarrow{CA}(2;2)$; b) (0; 0).
12. a) (−7; 11); b) (−6; 4).
13. $\vec{p}(-2;-5;9)$; $|\vec{p}|=\sqrt{110}$.
14. a) −10; b) 10.
15. $(\frac{2}{3};\frac{14}{3})$.
16. (−7; 7).
17. (0,5; 1).
18. $|\overrightarrow{AB}|=5$; $|\overrightarrow{AC}|=13$; $|\overrightarrow{AD}|=4\sqrt{5}$.
19. *Nurodymas*. Įrodykite, kad trikampis ABC yra statusis.
20. (6; 2; −2).
21. a) 15; b) −15.
22. a) $6\sqrt{3}$; b) 1.
23. 135°.
24. 60°.
25. a) 0,02; b) −3.
26. a) 45°; b) 135°.
27. a) Ne; b) taip.
28. $\vec{a}(3;6;6)$.
29. −2.
30. (−4; −6; 12).


ISBN 9955-491-50-7
9 789955 491507